

GIUSEPPE GIULIANI

Elettromagnetismo, relatività, quanti Fisica, storia, epistemologia

Pavia University Press Scientifica Scientifica

Giuseppe Giuliani

Elettromagnetismo, relatività, quanti Fisica, storia, epistemologia



Elettromagnetismo, relatività, quanti : Fisica, storia, epistemologia / Giuseppe Giuliani. – Pavia : Pavia University Press, 2019. – XVI, 324 p. : ill. ; 24 cm. (Scientifica)

ISBN 9788869521089 (brossura) - ISBN 9788869521218 (e-book PDF)

© 2019 Pavia University Press, Pavia ISBN: 978-88-6952-108-9

Nella sezione *Scientifica* Pavia University Press pubblica esclusivamente testi scientifici valutati e approvati dal Comitato scientifico-editoriale.



I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento anche parziale, con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i paesi.

L'autore è a disposizione degli aventi diritti con cui non abbia potuto comunicare, per eventuali omissioni o inesattezze.

In copertina: arcobaleno osservato all'alba a Sauris di Sopra (24 luglio 2014), foto dell'Autore

Prima edizione: settembre 2019

Pavia University Press – Edizioni dell'Università degli Studi di Pavia Via Luino, 12 – 27100 Pavia (PV) Italia www.paviauniversitypress.it – unipress@unipv.it

Stampa: DigitalAndCopy S.a.S., Segrate (MI) *Printed in Italy*

A Lara, Ludovico e Paride

A Chiara, Elisa e Francesco

Indice

Indice

Pr	Prefazione					
In	Introduzione					
I	Che	cos'è ı	ına teoria fisica	5		
	I.1	Eleme	enti di una teoria	6		
	I.2	Il sign	ificato di 'significato fisico'	9		
		I.2.1	Entità teoriche	9		
		I.2.2	Grandezze fisiche	10		
	I.3	Cosa	significa interpretare una teoria fisica	11		
		I.3.1	Interpretazione di una teoria e meccanica quantica	16		
			I.3.1.1 La meccanica quantica è una proto - teoria	16		
		I.3.2	Dispositivi quantici	20		
	I.4	Causa	ılità, determinismo, predicibilità	21		
	I.5	Il sign	ificato di 'legge fisica'	25		
II	Il te	mpo: ι	ına grandezza fisica peculiare	27		
	II.1	Che c	osa è il tempo?	27		
	II.2	Orolo	gi ideali e orologi reali	29		
		II.2.1	Come è fatto un orologio	29		
	II.3	Il tem	po nella relatività speciale	30		
		II.3.1	I postulati della relatività speciale	30		
		II.3.2	Esperimenti ideali con lampi di luce	35		
		II.3.3	L'effetto viaggio	37		
		II.3.4	Il formalismo spazio - temporale	40		
		II.3.5	Dilatazione del tempo ed effetto viaggio: gli esperimenti	41		
			II.3.5.1 Effetto viaggio	41		

		II.3.5.2 Dilatazione del tempo	47
II.4	Il tem	po nella relatività generale	51
II.5	5 Lo spa	azio - tempo è un oggetto?	54
III La	teoria d	i Maxwell	57
III.	1 La nas	scita della teoria	57
III.	2 Le equ	ıazioni	61
	III.2.1	I campi elettrico e magnetico	61
	III.2.2	I potenziali elettromagnetici	66
III.	3 Misur	a del campo elettrico di un'onda luminosa	72
III.	4 Carich	ne, campi e causalità	74
III.	5 Elettro	omagnetismo e relatività	76
III.	6 L'indu	zione elettromagnetica	80
	III.6.1	Faraday e l'induzione	81
	III.6.2	Maxwell e l'induzione	85
	III.6.3	Legge generale dell'induzione elettromagnetica	87
	III.6.4	Einstein e l'induzione	92
	III.6.5	Il disco di Faraday e la relatività del moto	96
	III.6.6	Considerazioni finali	98
IV La	luce		101
IV.	1 Da Yo	ung a Maxwell: cronologia essenziale	101
IV. IV.	1 Da Yo 2 La rad	ung a Maxwell: cronologia essenziale	101 104
IV. IV.	1 Da Yo 2 La rad IV.2.1	ung a Maxwell: cronologia essenziale liazione di corpo nero Planck (1900)	101 104 111
IV. IV.	1 Da Yo 2 La rad IV.2.1 IV.2.2	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)	101 104 111 112
IV. IV.	1 Da Yo 2 La rad IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)Einstein (1916 - 1917)	101 104 111 112 112
IV. IV.	1 Da Yo 2 La rad IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4	ung a Maxwell: cronologia essenziale	101 104 111 112 112 115
IV. IV.	 Da Yo La rad IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4 IV.2.5 	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)Linstein (1916 - 1917)Bose (1924)La radiazione cosmica di fondo	101 104 111 112 112 115 119
IV. IV.	 Da Yoi La rad IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4 IV.2.5 IV.2.6 	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)Linstein (1916 - 1917)Bose (1924)La radiazione cosmica di fondoSviluppi successivi: le statistiche quantiche	101 104 111 112 112 115 119 120
IV. IV.	 Da Yoi La rad IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4 IV.2.5 IV.2.6 L'ipoto 	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)Linstein (1916 - 1917)Bose (1924)La radiazione cosmica di fondoSviluppi successivi: le statistiche quanticheesi euristica dei quanti di luce	101 104 111 112 112 115 119 120 123
IV. IV. IV.	 Da Yoi La rad IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4 IV.2.5 IV.2.6 L'ipote Le unitiation of the second seco	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)Linstein (1916 - 1917)Bose (1924)La radiazione cosmica di fondoSviluppi successivi: le statistiche quanticheesi euristica dei quanti di luceità discrete di energia di Joseph John Thomson	101 104 111 112 112 115 119 120 123 128
IV. IV. IV. IV. IV.	 Da Yoi La radi IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4 IV.2.5 IV.2.6 L'ipote Le uni Ambig 	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)Laratiazione cosmica di fondoSviluppi successivi: le statistiche quanticheesi euristica dei quanti di luceità discrete di energia di Joseph John Thomsongue fluttuazioni	101 104 111 112 112 115 119 120 123 128 130
IV. IV. IV. IV. IV. IV.	 Da Yoi La radi IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4 IV.2.5 IV.2.6 L'ipoto Le uni Ambig Quanti 	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)Debye (1910)Einstein (1916 - 1917)Bose (1924)La radiazione cosmica di fondoSviluppi successivi: le statistiche quanticheesi euristica dei quanti di luceità discrete di energia di Joseph John Thomsongue fluttuazioniti di luce senza quantità di moto	101 104 111 112 112 115 119 120 123 128 130 132
IV. IV. IV. IV. IV. IV. IV.	 Da Yoi La radi IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4 IV.2.5 IV.2.6 L'ipote Le uni Ambig Quant Effette 	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)Debye (1910)Einstein (1916 - 1917)Bose (1924)La radiazione cosmica di fondoSviluppi successivi: le statistiche quanticheesi euristica dei quanti di luceità discrete di energia di Joseph John Thomsongue fluttuazioniti di luce senza quantità di motoo Doppler per i fotoni	101 104 111 112 112 115 119 120 123 128 130 132 134
IV. IV. IV. IV. IV. IV. IV.	 Da Yoi La radi IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4 IV.2.5 IV.2.6 L'ipote Le uni Ambig Quant Effette IV.7.1 	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)Debye (1910)Einstein (1916 - 1917)Bose (1924)La radiazione cosmica di fondoSviluppi successivi: le statistiche quanticheesi euristica dei quanti di luceità discrete di energia di Joseph John Thomsongue fluttuazioniti di luce senza quantità di motoconservazione della quantità di moto	101 104 111 112 115 119 120 123 128 130 132 134 135
IV. IV. IV. IV. IV. IV. IV. IV.	 Da Yoi La radi IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4 IV.2.5 IV.2.6 L'ipote Le uni Ambig Quanti Effette IV.7.1 IV.7.2 	ung a Maxwell: cronologia essenziale	101 104 111 112 112 115 119 120 123 128 130 132 134 135 137
IV. IV. IV. IV. IV. IV. IV.	 Da Yoi La radi IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4 IV.2.5 IV.2.6 L'ipote L'ipote Ambig Quant Effette IV.7.1 IV.7.2 IV.7.3 	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)Debye (1910)Einstein (1916 - 1917)Bose (1924)La radiazione cosmica di fondoSviluppi successivi: le statistiche quanticheesi euristica dei quanti di luceità discrete di energia di Joseph John Thomsongue fluttuazioniti di luce senza quantità di motoconservazione della quantità di motoconservazione dell'energia e della quantità di motoEffetto Doppler su dispositivi rotanti	101 104 111 112 112 115 119 120 123 128 130 132 134 135 137 144
IV. IV. IV. IV. IV. IV. IV.	 Da Yoi La radi IV.2.1 IV.2.2 IV.2.3 IV.2.4 IV.2.5 IV.2.6 L'ipote Le uni Ambig Quanti Effetto IV.7.1 IV.7.2 IV.7.3 IV.7.4 	ung a Maxwell: cronologia essenzialeliazione di corpo neroPlanck (1900)Debye (1910)Debye (1910)Einstein (1916 - 1917)Bose (1924)La radiazione cosmica di fondoSviluppi successivi: le statistiche quanticheesi euristica dei quanti di luceità discrete di energia di Joseph John Thomsongue fluttuazioniti di luce senza quantità di motoconservazione della quantità di motoconservazione dell'energia e della quantità di motoEffetto Doppler su dispositivi rotantiRaffreddamento di gas atomici con luce laser	101 104 111 112 112 115 119 120 123 128 130 132 134 135 137 144

	IV.9	Interferenza della luce	61
		IV.9.1 Descrizione divulgativa di Maxwell	62
		IV.9.2 Descrizione elettromagnetica 1	165
		IV.9.3 Descrizione quantica	68
		IV.9.4 Onde elettromagnetiche e fotoni	170
		IV.9.5 Esperimenti di interferenza a fotone singolo 1	172
		IV.9.6 Fotografie con basse intensità luminose 1	173
	IV.10	Raccordo tra descrizione ondulatoria e corpuscolare della luce 1	174
	Due formule (magiche)	175	
	IV.12	Costanti universali 1	84
v	Sull	energia 1	87
•	V1	Energia cinetica ed energia notenziale	187
	V2	Energia del campo elettromagnetico	89
	V3	Massa e energia nella relatività speciale	91
	V.0	Massa e inerzia	98
	V.1	I fotoni	200
	V.6	Che cosa è l'energia?	200
	V.7	Simmetrie e leggi di conservazione	206
л	Moo	conice quantice, ficine a filosofie	00
VI	И 1	La regola di sovrapposizione	03 010
	VI.1 VЛ 2		210
	V1.2 VЛ 3	Lo stato di sovrannosizione nella meccanica quantica	210
	V1.J	VI 3.1. Il gatto di Schrödinger	215
	М И	Il principio di indeterminazione di Heisenberg	213
	V1.4	VI 4.1. Le disuguaglianze di Kennard e Robertson	217
		VI.4.2 Il significato fisico delle disuguaglianzo HKR	220
		VI.4.2 In signification inside define distiguizgnalize TIKR	222
	И 5	La meccanica quantica è una teoria completa?	224
	V1.J	VI 5 1. L'articolo di Finstein. Podolsky e Rosen	220
		VI.5.2 La versione di Bohm dell'esperimento mentale FPR	220
		VI.5.2 La versione di Bohini dei esperimento mentale El R 2 VI.5.3 La teoria a variabili nascoste di Bohm	230
		VI.5.4 Intermezzo: la condizione di località	231
		VI 5 5 Il contributo di John Bell	234
		VI 5 5 1 Il teorema e la disuguaglianza di Bell 2	239
		VI.5.5.2 Generalizzazione del teorema di Bell	240
		VI.5.6 Esperimenti sulle disuguaglianze di tipo Bell	241
		VI.5.7 L'esperimento di Orsav (1982)	242

VI.5.8 Interpretazione dell'esperimento di Orsay 24	46			
VI.5.9 Misura della polarizzazione dei fotoni	48			
VI.6 Meccanica quantica e filosofia	49			
VI.7 La meccanica quantica non ha bisogno di 'interpretazioni' 2	52			
Appendici 25	54			
A Esperimenti ideali con lampi di luce 25	55			
A.1 Dilatazione del tempo 23	55			
A.2 Effetto Doppler	58			
A.3 Contrazione delle lunghezze	60			
A.4 Trasformazioni di Lorentz	62			
B Cinematica e dinamica relativistica 26	65			
B.1 Cinematica	65			
B.2 Dinamica	68			
B.3 Emissione o assorbimento di un fotone	72			
B.4 Assorbimento di un fotone con la dinamica newtoniana 2	74			
B.5 Red shift gravitazionale con la relatività speciale 2'	76			
C Induzione elettromagnetica: tre esempi significativi 27	79			
C.1 Dove è localizzata la forza elettromotrice?	79			
C.2 Il disco di Corbino	84			
C.3 Il disco di Faraday con simmetria radiale	87			
D Materiali otticamente anisotropi 28	39			
D.1 Caratteristiche dell'anisotropia ottica	89			
D.2 Uso di materiali otticamente anisotropi	92			
D.3 Misura della polarizzazione della luce	94			
Bibliografia				
Indice analitico				

Prefazione

Questo volume nasce dall'idea di ripercorrere criticamente alcuni temi di cui mi sono occupato nel corso degli ultimi decenni. La trattazione dei varî argomenti è guidata da una concezione epistemologica e filosofica esposta nelle pagine iniziali.

Il titolo del volume pone in evidenza il contenuto e le connessioni tra le sue parti. Da un lato, una rilettura critica dell'elettromagnetismo maxwelliano da parte di Einstein ha condotto alla relatività speciale; dall'altro, i problemi posti dall'intreccio tra elettromagnetismo e termodinamica nella trattazione della radiazione di corpo nero hanno suggerito l'invenzione della costante *h* di Planck, attraverso la formula E = hv, innescando così il successivo sviluppo della fisica quantica. Parallelamente, il dubbio che l'elettromagnetismo maxwelliano non fosse in grado di descrivere i processi di emissione e assorbimento della luce da parte della materia, ha suggerito ad Einstein di proporre il concetto di quanto di luce ed una radicale reinterpretazione della formula di Planck E = hv.

Il sottotitolo suggerisce, sinteticamente, che la fisica dovrebbe essere praticata e studiata alla luce di criteri epistemologici ben definiti e che questi ultimi dovrebbero essere messi alla prova analizzando alcuni snodi fondamentali dell'evoluzione storica della fisica.

La presentazione dei vari argomenti non è cronologica, ma si sviluppa intorno a concetti o teorie. Dopo l'esposizione della concezione epistemologica adottata, il volume si apre sul concetto di tempo e sulla sua misura; segue, quindi, la relatività speciale; si passa poi all'elettromagnetismo ed alla luce. Il successivo capitolo sull'energia si riallaccia a tutti i capitoli precedenti. Infine, l'ultima parte è dedicata alla meccanica quantica.

La tecnica di esposizione adottata prevede, in generale, solo la presentazione e la discussione dei risultati dei calcoli, rimandando lo sviluppo degli stessi alle appendici. Questa scelta intende favorire la messa a fuoco dei concetti e delle loro implicazioni. Soprattutto nei due capitoli dedicati all'e-

Prefazione

lettromagnetismo ed alla luce sono richiamati alcuni snodi dello sviluppo storico della fisica, snodi che, per loro natura, si prestano alla verifica della ragionevolezza e dell'utilità dei criteri epistemologici sviluppati nella prima parte del volume.

Il tempo è una grandezza fisica peculiare perché non è misurata ma solo mostrata da un orologio. Il capitolo ad esso dedicato chiarisce questa distinzione fondamentale, sviluppando tutte le sottigliezze connesse all'avvento della relatività speciale e generale. Particolare attenzione è dedicata all'effetto viaggio (paradosso degli orologi risolto) e alla connessa questione della relatività del moto.

L'elettromagnetismo di Faraday e Maxwell è rivisitato ponendo in evidenza la stretta connessione tra le ricerche sperimentali di Faraday e la loro descrizione teorica da parte di Maxwell (peraltro ampiamente riconosciuta da quest'ultimo). La teoria di Maxwell, nata quando l'Etere costituiva un elemento essenziale dell'immagine fisica del Mondo (per usare un'espressione cara a Planck) è, probabilmente, la teoria fisica che è sopravvissuta ai più radicali mutamenti nel corso della sua storia: la scomparsa dell'Etere, l'avvento della relatività speciale, il riemergere della descrizione corpuscolare della luce. Infine, le sue equazioni, in cui il campo elettrico e magnetico sono sostituiti da operatori, sono state alla base della formulazione della elettrodinamica quantica. Ampio spazio è dedicato al fenomeno dell'induzione elettromagnetica. Come è noto, questo fenomeno è usato nella produzione di energia elettrica, se si eccettua quella ottenuta mediante conversione dell'energia luminosa con cellule fotovoltaiche. Assai meno conosciuto è il fatto che l'induzione elettromagnetica costituisce un intrigante caso storico. Una legge generale dell'induzione elettromagnetica compare nel Trattato di Maxwell; ma l'equazione che la esprime riserva un ruolo centrale al potenziale vettore. Verso la fine dell'Ottocento, Heaviside e Hertz optarono, sebbene con considerazioni epistemologiche di diverso spessore, per una presentazione dell'elettromagnetismo in funzione dei campi, escludendo esplicitamente l'uso dei potenziali. Verosimilmente, questa scelta, da allora sistematicamente adottata dai libri di testo (con rare eccezioni), ha contribuito a far cadere nell'oblio la legge generale ricavata da Maxwell lasciando così campo aperto alla 'legge del flusso' che è in realtà una semplice regola di calcolo, non sempre valida.

Il capitolo dedicato alla luce rappresenta il punto di incontro e di snodo tra fisica classica e fisica quantica. L'Ottocento ha assistito al trionfo della descrizione ondulatoria della luce. Questa descrizione si è radicata così in profondità da ostacolare ancora oggi l'uso della descrizione corpuscolare nei processi di emissione e assorbimento della luce da parte di atomi o nuclei. Dalle riflessioni sviluppate in questo capitolo emerge che le predizioni della descrizione ondulatoria della luce sono corrette quando il numero dei fotoni coinvolti (uno alla volta o tutti insieme) è statisticamente significativo e la descrizione dei fenomeni studiati non richiede di considerare lo scambio di energia e quantità di moto a livello atomico (o nucleare). Dal punto di vista teorico, ciò è plausibile perché, per esempio, la descrizione maxwelliana dell'interferenza e quella quantica hanno la stessa struttura matematica. Dal punto di vista sperimentale questa relazione tra le due descrizioni è confermata dagli esperimenti di interferenza e da quelli eseguiti con fotografie con diverse intensità luminose. Tuttavia, alla fine, non sappiamo perché le cose vadano così. Il lettore avrà già intuito che il tema della luce (che cosa è la luce?) è un fertile campo di applicazione e verifica dei criteri epistemologici e filosofici enunciati all'inizio del volume. Una sezione di questo capitolo è dedicata a due formule che hanno svolto e svolgono tuttora un ruolo fondamentale nella descrizione fisica: la formula di Einstein che lega l'energia di un fotone (allora quanto di luce) alla frequenza della luce descritta come un'onda elettromagnetica; e la formula di de Broglie che associa un'onda ad ogni massa. Le due formule possiedono uno stato epistemologico diverso. Mentre quella di Einstein svolge attivamente il suo ruolo di tramite in ogni contesto in cui la descrizione corpuscolare della luce può essere sostituita da quella ondulatoria, la formula di de Broglie, pur permettendo di descrivere tutta una serie di fenomeni, permane come una ipotesi ad hoc non integrata in una teoria consolidata. Le due formule hanno in comune una caratteristica: funzionano, ma non sappiamo perché.

Il concetto di energia, nelle sue varie accezioni, è discusso nel capitolo quinto. Ci sono due forme di energia utilizzabili: l'energia cinetica e l'energia a riposo di una massa. Il concetto di energia potenziale, come è stato usato nell'Ottocento, è incompatibile con la relatività speciale e generale nelle quali le interazioni fisiche si propagano con velocità finita. Tuttavia, nella relatività speciale, nell'espressione dell'energia a riposo di una particella composta, compaiono i valori medi dell'energia cinetica e potenziale delle particelle costituenti. E nella relatività generale, l'energia potenziale newtoniana può essere usata quando i campi gravitazionali sono sufficientemente deboli e le velocità delle masse sono piccole rispetto a quelle della luce.

L'ultimo capitolo del volume è dedicato alla meccanica quantica. Qui,

Prefazione

le premesse filosofiche ed epistemologiche enunciate all'inizio, trovano la loro più estesa applicazione. In questo capitolo emerge una posizione critica rispetto alle 'implicazioni filosofiche della meccanica guantica'. A mio giudizio, nessuna teoria fisica può implicare alcunché di filosofico, ma solo suggerire alcuni criteri di analisi della relazione esistente tra il Mondo e l'immagine fisica di esso (per usare di nuovo una espressione di Planck). La storia della Scienza mostra che le opzioni filosofiche che stanno alla base dell'impresa scientifica – esiste un Mondo indipendente dall'osservatore. principio di causalità e riproducibilità dei fenomeni - alimentano anche il senso comune razionalmente orientato. Questi presupposti hanno svolto e svolgono una funzione euristica positiva, cioè stimolano la ricerca di spiegazioni sempre più esaurienti dei fenomeni osservati e, quindi, la scoperta di nuovi fenomeni. Questo substrato filosofico è naturalmente in contrasto con l'euristica negativa legata ad una più o meno meccanica trasposizione a livello filosofico di alcune caratteristiche della meccanica quantica. Questa euristica negativa emerge chiaramente quando si presuppone che la descrizione probabilistica della meccanica quantica implichi l'assenza di connessioni causali nei processi atomici o nucleari e, quindi, l'inutilità della ricerca di queste connessioni. Ampio spazio è dedicato alle questioni connesse al cosiddetto argomento EPR (Einstein, Podolsky e Rosen). Innanzitutto si discute come la condizione di località implicita nella relatività speciale (non è possibile una interazione fisica tra due eventi separati da una distanza superiore a quella che la luce percorrerebbe nell'intervallo di tempo che separa i due eventi) sia utilizzata nei teoremi di tipo Bell. In secondo luogo, si argomenta che l'ipotesi secondo cui, almeno in alcune situazioni fisiche, alcune grandezze fisiche non hanno un valore definito prima della misura è un'ipotesi suscettibile di verifica sperimentale e, quindi, essa è, in prima istanza, una ipotesi fisica e non filosofica. Di conseguenza, la cosiddetta non - località della meccanica quantica invocata per descrivere a posteriori i risultati sperimentali degli esperimenti di tipo EPR è una assunzione non necessaria perché, non essendo usata per effettuare predizioni, può essere eliminata senza diminuire la capacità predittiva della teoria. La conclusione sintetica di queste riflessioni è che gli esperimenti talvolta falsificano una teoria, ma mai una filosofia. Non è infatti noto alcun caso in cui i postulati di una teoria derivino logicamente da una concezione filosofica: solo in questo caso, un esperimento che falsifica una teoria falsificherebbe anche la filosofia che l'ha prodotta. Pertanto asserzioni secondo cui gli esperimenti di tipo EPR falsificherebbero il realismo - inteso, peraltro, in accezioni diverse - appaiono prive di significato.

Nel corso degli studi che ripercorro in questo volume, ho potuto avvalermi, in misura e con frequenza diversa, di proficue discussioni con colleghi, docenti, laureandi e, talora, studenti. Tra questi, senza distinzione di ruolo: Mary Antoniazzi, Ennio Arimondo, Ilaria Bonizzoni, Claudio Borghi, Alfio Briguglia, Biagio Buonaura, Giancarlo Campagnoli, Antonio Casella, Giacomo D'Ariano, Laura del Sere, Nicole Fabbri, Silvana Galdabini, Chiara Giacomarra, Mario Guidone, Gianluca Introzzi, Paolo Marazzini, Paolo Mascheretti, Barbara Mastracchio, Roberta Milani, Fabiano Minni, Donata Mutti, Fabio Pavesi, Massimo Rapetti, Attilio Rigamonti, Nadia Robotti, Peppino Sapia e Francesca Turco. Mario Guidone e Paolo Marazzini non sono più tra noi. Questo volume è anche un segno del ricordo che ci hanno e mi hanno lasciato.

Naturalmente, nessuno di questi interlocutori è responsabile di quanto scritto in questo volume e degli eventuali errori in esso contenuti.

Un particolare ringraziamento va a Paolo Mascheretti, interlocutore di appassionate discussioni filosofiche sin dai tempi della comune vita ghislieriana e poi rassicurante punto di riferimento ognigualvolta ho avuto necessità di verificare la attendibilità di alcune intuizioni o di chiarire punti a me oscuri; a Silvana Galdabini, compagna di una stagione pionieristica di esplorazione dello sviluppo di settori della fisica in Italia sino ad allora ignorati dalla ricerca storica; a Antonio Casella, suggeritore e ispiratore di riflessioni sui fondamenti filosofici della Scienza e sulle connessioni tra sviluppo della fisica in Italia e contesto economico, politico e culturale, nonché convinto promotore della Collana Percorsi della fisica; a Ilaria Bonizzoni, per l'apporto essenziale alla stesura del manuale di elettromagnetismo; a Claudio Borghi, per le stimolanti discussioni su tempo e orologi; a Chiara Giacomarra, per i contributi sugli sviluppi storici dei fenomeni di interferenza; a Ennio Arimondo, le cui osservazioni critiche sono state fondamentali per la messa a punto del lavoro sul raffreddamento di vapori atomici con luce laser; a Biagio Buonaura, prezioso lettore critico delle varie stesure dei miei ultimi lavori e di questo volume: le sue osservazioni ed suoi suggerimenti hanno contribuito ad ampliare argomenti e migliorare l'esposizione; e a Gianluca Introzzi che ha seguito con amicale attenzione la stesura di questo testo.

A Gianfranco Chiarotti (1928 - 2017), che mi ha, con rigore e severità, addestrato alla ricerca sperimentale quando ancora, alla fine degli anni Cinquanta, gran parte della strumentazione era laboriosamente costruita in lo-

Prefazione

co, debbo la costante sensibilità e attenzione agli aspetti sperimentali della ricerca fisica anche nei miei studi di natura storica ed epistemologica.

Le scuole di Storia della Fisica ideate da Carla Romagnino e organizzate dal Gruppo di Storia della Fisica dell'AIF, cui ho partecipato in veste di docente sin dal lontano 2002, sono state preziose occasioni di discussione e di messa a punto di molti degli argomenti qui trattati.

Un sentito ringraziamento è infine dovuto a due anonimi revisori le cui osservazioni hanno permesso di chiarire alcuni passaggi, completare diversi argomenti e migliorare la struttura del volume.

Il libro è dedicato a Lara Tiranini, Ludovico Lanfranchi e Paride Fenaroli che mi hanno incontrato una sera di novembre di quattro anni fa nella comune casa ghislieriana: senza quell'incontro, questo libro non avrebbe visto la luce. E ai miei amati nipoti, Chiara, Elisa e Francesco: mi auguro che, scorrendo questo volume, possano comprendere come lo studio, motivato dal desiderio di conoscenza e illuminato da un vigile spirito critico, sia fondamentale nel lavoro e nella vita.

Giuseppe Giuliani

Pavia e Sauris di Sopra, giugno 2019

Introduzione

La storia della fisica ci mostra in ogni pagina che questo difficilissimo compito fu sempre risolto ammettendo un mondo reale indipendente dai sensi umani, e non c'è dubbio che sarà così anche in futuro. Oltre al mondo sensibile ed al mondo reale c'è ancora, ed occorre tenerlo ben distinto dagli altri due, il mondo quale ce lo presenta la Scienza fisica: l'immagine fisica del mondo. Questo terzo mondo, contrariamente agli altri due, è stato creato coscientemente per un determinato scopo dallo spirito umano, e perciò varia e va soggetto ad un certo sviluppo [1, p. 206].

Max Planck

Oggi la Scienza è il prodotto di un processo sociale complesso la cui caratteristica più rilevante è costituita dallo stretto intreccio con la Tecnica. L'intreccio tra Scienza e Tecnica ha caratterizzato lo sviluppo della conoscenza scientifica nel corso dei secoli, ma esso è divenuto il principale meccanismo propulsivo dello sviluppo scientifico nell'Ottocento, a partire dalla Chimica e dalla Fisica. Questo intreccio è oggi tale da suggerire il termine Tecno -Scienza come descrittivo dell'insieme dei contesti e delle procedure usate per produrre nuove conoscenze e nuovi strumenti ¹. Oggi le applicazioni tecniche non possono prescindere dalle nuove conoscenze e, reciprocamente, l'acquisizione di nuove conoscenze è stimolata dalla disponibilità di dispositivi e strumenti prodotti dalle applicazioni tecniche. Useremo quindi il termine Scienza, come sinonimo di 'Conoscenza Scientifica', in riferimento a quelle proprietà della 'Scienza', della 'Tecnica' o della 'Tecno - Scienza' - comunque si intendano - connesse alla produzione di conoscenze sulla

¹Sull'origine e sull'uso del termine 'Tecno - Scienza' si può vedere [2].

Introduzione

struttura del Mondo. L'analisi storica mostra che la Scienza si è sviluppata sulla base di tre presupposti filosofici, che stanno anche alla base del senso comune razionalmente orientato:

P1 Esiste un Mondo, indipendente dall'osservatore, di cui l'osservatore fa parte.

P2 Il funzionamento del Mondo è costante nel tempo (riproducibilità dei fenomeni).

P3 Principio di causalità: ogni evento ha una causa.

Questi presupposti filosofici operano come principi guida nella pratica scientifica e nella vita quotidiana.

Il primo postulato può essere sostenuto con argomenti razionali; e, sebbene sia stato posto in discussione con argomentazioni di vario genere, sovente al limite del paradosso, costituisce il fondamento della Scienza e del senso comune razionalmente orientato.

Il secondo postulato costituisce il presupposto di ogni conoscenza del Mondo ed è stato, sinora, corroborato dall'esperienza².

Il principio di causalità svolge un ruolo euristico fondamentale perché si traduce nell'impegno metodologico della ricerca delle cause dei fenomeni.

Questi tre postulati, interpretati come indicato, costituiscono i presupposti di quello che possiamo chiamare *realismo temperato*, le cui caratteristiche saranno sviluppate nel prossimo capitolo.

L'accettazione del postulato (*P*1), fa sorgere immediatamente il problema di quale sia il rapporto tra descrizioni del Mondo (o di una sua parte) e il Mondo ³. Cercare di rispondere a questa domanda equivale a delineare una 'teoria della Conoscenza Scientifica': qualunque essa sia, *dovrebbe* essere indipendente dalle varie discipline sperimentali, dalle loro teorie e dai loro risultati sperimentali. Uno scopo di questo tipo va oltre i limiti di questo scritto e, soprattutto, oltre i limiti delle mie competenze. Mi limiterò quindi a svolgere alcune riflessioni sulla Fisica, lasciando aperta la questione della loro possibile estensione alle altre discipline.

È opportuno distinguere il contesto della scoperta dal contesto della giustificazione. Con le parole di Reichenbach:

Lo sviluppo storico della meccanica quantica illustra, pertanto, la distinzione fra contesto della scoperta e contesto della giustificazione; di-

²In tempi abbastanza recenti è stato posta in discussione la costanza nel tempo delle costanti universali. Per una discussione di questo argomento si può vedere [3]. In ogni caso, la eventuale variabilità delle costanti universali nel corso della evoluzione dell'Universo non intacca la validità e la persistenza delle leggi fisiche in cui queste costanti compaiono.

³Questo problema si pone anche per le 'descrizioni' usate nella vita quotidiana.

stinzione che deve venir fatta per tutti i generi di ricerca scientifica. La strada della scoperta corre attraverso una «serie di inferenze che sono profondamente avvolte nell'oscurità dell'indovinare istintivo», se mi è permesso applicare qui una frase che Schrödinger mi rivolse in una sua lettera, scritta alcuni anni prima delle sue grandi scoperte nel campo della meccanica quantica. Una volta poi che una teoria è stata costruita, essa va giudicata entro il contesto della giustificazione, vale a dire mediante l'evidenza induttiva a essa conferita dal successo empirico [4, p. 121].

Questa distinzione non implica una separazione temporale tra scoperta e giustificazione per quanto riguarda il singolo scienziato, ma il riconoscimento che i due contesti obbediscono a criteri metodologici distinti. Non è difficile trovare esempi storici appropriati. Si pensi ad esempio, alla proposta di Einstein dei quanti di luce o alla proposta di de Broglie di associare un'onda ad una particella massiva. Nel caso di Einstein, l'ipotesi dei quanti di luce è presentata sulla base di una analisi critica di come i fisici trattino in modo diverso un corpo massivo (numero discreto, anche se grandissimo, dei valori delle posizioni e delle velocità delle particelle che costituiscono il corpo) e il campo elettromagnetico (funzioni spaziali e temporali continue). Nonché sulla base del dubbio che la teoria di Maxwell non sia in grado di spiegare i processi di emissione e assorbimento della luce. Quindi, l'ipotesi dei quanti di luce nasce nel contesto di una analisi critica della concezione esistente. Nel caso di de Broglie assistiamo invece ad una spregiudicata e audace commistione tra relatività speciale e quanti di luce, favorita dall'idea, allora condivisa anche da altri fisici, secondo cui i quanti di luce hanno una massa non nulla, seppur piccolissima. In entrambi i casi, il contesto della giustificazione ha riguardato un lungo processo storico durato decenni e ancora non concluso: come vedremo più avanti, alcune questioni poste dalle due ipotesi sono ancora aperte.

Il fatto che il contesto della scoperta riguardante il singolo scienziato sia caratterizzato da criteri di comportamento molto liberi, rispetto alle regole condivise dalla comunità scientifica per quanto riguarda il contesto della giustificazione, è stato efficacemente illustrato da Percy Bridgman:

Una lunga esperienza ha mostrato allo scienziato che diverse cose ostacolano la via verso una risposta corretta. Ha scoperto che non è sufficiente credere alle parole del suo vicino, ma che, se vuole essere sicuro, deve essere in grado di verificare un risultato egli stesso. Pertanto, lo scienziato è nemico di ogni autoritarismo. Inoltre, egli scopre che spesso fa degli errori e che deve imparare come evitarli. Non può

Introduzione

permettersi alcun pregiudizio circa il tipo di risultato che otterrà, né di farsi influenzare da presunzioni favorevoli o preferenze personali.

[...]

Nell'attacco al suo problema specifico egli non soffre di alcuna inibizione dovuta a casi precedenti o autorità, ma è completamente libero di adottare qualunque percorso il suo ingegno sia in grado di suggerirgli. Nessuno può predire ciò che il singolo scienziato farà o che metodo seguirà. In breve, la Scienza è ciò che gli scienziati fanno e ci sono tanti metodi scientifici quanti scienziati [5, p. 82 - 83] ⁴.

Il contesto della scoperta rimanda quindi alla necessità di un'indagine storica per cercare di comprendere come osservazioni, concetti, ipotesi, esperimenti e teorie siano emersi e siano stati correlati nel corso dello sviluppo della Scienza.

Nel contesto della giustificazione, il rapporto tra teoria ed esperimento deve essere considerato alla luce di regole metodologiche condivise: questo insieme di regole non scritte è, a sua volta, oggetto di indagine storica (oggi anche sociologica) perché il 'metodo della Scienza', o meglio, i 'metodi delle scienze', intesi come insieme di regole largamente condivise dalle comunità scientifiche disciplinari, variano nel tempo.

Le opzioni filosofiche di fondo dell'impresa scientifica costituiscono anche il fondamento del senso comune razionalmente orientato. Questo fatto ha implicazioni profonde. Da un lato, il senso comune razionalmente orientato condivide alcuni fondamentali valori che stanno alla base della pratica scientifica. In particolare, rifiuta le posizioni dogmatiche: di conseguenza, valuta le idee sulla base della loro consistenza logica rispetto al contesto in cui sono inserite e tenendo conto del loro fondamento empirico; elabora immagini del Mondo basate su conoscenze considerate ragionevolmente acquisite; considera il dissenso come una naturale manifestazione di punti di vista differenti e ritiene che le divergenze di opinione possano essere razionalmente ricomposte. È tuttavia consapevole che una composizione razionale delle divergenze è ostacolata, e sovente impedita, da scelte di valore, da credenze religiose o pregiudizi, da interessi economici e da componenti affettive. Dall'altro lato, gli scienziati dovrebbero accuratamente evitare di diffondere le acquisizioni della Scienza come se fossero in contrasto con il 'senso comune' o circondandole di aloni 'magici'; dovrebbero invece costantemente impegnarsi in una opera di divulgazione che solleciti le facoltà razionali del cittadino.

⁴Qui, Bridgman non separa il contesto della scoperta da quello della giustificazione.

Capitolo I

Che cos'è una teoria fisica

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'Universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto [6, p. 232].

Galileo Galilei

Che cos'è una teoria fisica? Per rispondere a questa domanda dobbiamo guardare a teorie che hanno avuto successo in fisica e cercare di capire come sono fatte e quali sono le caratteristiche essenziali che ne fanno una teoria 'fisica' ¹.

¹La struttura delle teorie (non solo fisiche) costituisce da lungo tempo oggetto privilegiato di indagine della riflessione filosofica sulla Scienza. Per avere un'idea anche solo approssimata della vastità e varietà dei temi e dei problemi connessi alla struttura delle teorie, il lettore interessato può proficuamente sfogliare la numerose voci della *Stanford Encyclopledia of Philosophy*. La funzione di queste voci, corredate da ampie bibliografie, è quella di servire da introduzione critica agli argomenti trattati. Si può anche vedere il volume curato da Frederick Suppe nel 1977 [7]. Nonostante siano trascorsi quarant'anni dalla sua pubblicazione, questo volume costituisce ancora una stimolante introduzione alla filosofia della Scienza.

I.1 Elementi di una teoria

E quando ai Fisici, già sopraffatti dalla complicazione del meccanismo ideato, si chiede se i nuovi enti, ch'essi maneggiano come cose vive, abbiano un'esistenza obbiettiva o rappresentino solo un mezzo economico e provvisorio d'indagine, la immensità del problema li sgomenta e li dissuade dalla elaborazione scientifica di una risposta qualsiasi. E rinunziando alla qualità d'uomini di Scienza, ma ubbidendo solo alle proprie tendenze sentimentali, precipitano la loro opinione così come se giudicassero di un problema di religione o di politica o di estetica [8, p. 22].

Orso Mario Corbino

Le teorie usano *entità teoriche*. Esempi di entità teorica sono: punto materiale, corpo rigido, gas, elettrone. Nelle equazioni compaiono invece *grandezze fisiche* che descrivono proprietà delle entità teoriche o sono attribuite a entità teoriche o descrivono interazioni tra entità teoriche. Per esempio: la massa descrive una proprietà di un punto materiale, di un corpo rigido, di un gas o di un elettrone; la velocità, rispetto ad un sistema di riferimento, è attribuita ad un punto materiale, ad un corpo rigido o a un elettrone; la forza descrive l'interazione tra due corpi rigidi o tra due elettroni. In generale, *le grandezze fisiche possono essere misurate, almeno in linea di principio*. Una teoria interpretata indica o suggerisce quali sono le grandezze fisiche da sottoporre a misura.

Tuttavia, nelle equazioni della fisica compaiono anche funzioni delle coordinate spaziali e del tempo che non rappresentano grandezze fisiche (misurabili). Un esempio ben noto è quello della funzione d'onda (o funzione di stato) della meccanica quantica.

Quando espresse in forma ipotetico – deduttiva (assiomatica), le teorie si fondano su un insieme di postulati da cui possono essere dedotte le predizioni riguardanti i valori che le grandezze fisiche possono assumere nel contesto fisico definito da un esperimento. Per esempio: la dinamica newtoniana permette di prevedere quale sarà la velocità di un corpo, lasciato cadere nel vuoto da una certa altezza, quando raggiungerà il suolo; l'elettromagnetismo maxwelliano prevede quale valore avrà il campo elettrico (o magnetico) generato ad una certa distanza da un elettrone che si muove di moto armonico intorno all'origine delle coordinate di un sistema di riferimento inerziale (SRI).

Giuseppe Giuliani - Elettromagnetismo relatività quanti

Di ogni teoria dovremmo essere in grado di individuare o delimitare il campo di applicazione. In generale, ogni teoria definisce il proprio campo di applicazione. Il campo di applicazione di una teoria può mutare nel tempo. Per esempio, l'avvento della dinamica relativistica ha mostrato che quella newtoniana è applicabile con buona approssimazione solo quando la velocità dei corpi è trascurabile rispetto a quella della luce nel vuoto, restringendone così il campo di applicazione. Analogamente, lo sviluppo della fisica degli atomi ha mostrato che l'elettromagnetismo e la dinamica non sono in grado di descrivere il comportamento neanche dell'atomo più semplice, cioè dell'atomo di idrogeno, delimitandone quindi il campo di applicazione ².

Ogni teoria può essere inquadrata in una immagine del Mondo. Il termine 'immagine del Mondo' è usato in letteratura con significati diversi. Per esempio, nel passo di Planck citato a pagina 1, per immagine del Mondo si intende una descrizione fisica di esso, descrizione che deve essere distinta dal Mondo reale, esistente indipendentemente dall'osservatore e dal Mondo come ci appare attraverso i nostri sensi. In questo testo, sosteniamo che per costruire una immagine del Mondo dobbiamo affermare che almeno alcune entità teoriche usate dalla teoria in esame esistono nel Mondo come *oggetti* e che questi oggetti si comportano come descritto dalla teoria: in particolare, i valori misurati delle grandezze fisiche ad essi associate debbono ragionevolmente corrispondere a quelli previsti dalla teoria. Dobbiamo, inoltre, affermare che almeno alcune delle connessioni causali *suggerite* dalla teoria interpretata sono operanti nel Mondo.

Le asserzioni di esistenza di 'oggetti' nel Mondo debbono essere compatibili con l'intera conoscenza considerata come acquisita, ma non derivano logicamente da essa: sono solo plausibili o verosimili. È necessario distinguere tra una asserzione di esistenza plausibile da una asserzione di esistenza verosimile. La richiesta di plausibilità di una affermazione di esistenza è di natura metodologica. Se una affermazione di esistenza soddisfa la condizione di plausibilità e questa plausibilità perdura nel tempo, l'affermazione di esistenza diviene sempre più verosimile. Non ostante questo incremento di verosimiglianza dovuto alla sua persistenza nel tempo, una affermazione di esistenza può, alla fine essere abbandonata. Per fare qualche esempio. Ai tempi di Maxwell si credeva che l'entità teorica 'Etere' avesse

²Costituisce una apparente eccezione la teoria relativistica dell'atomo di idrogeno di Sommerfeld. Sommerfeld ha trovato una formula per i livelli energetici che coincide con quella di Dirac. La coincidenza, tuttavia, è fortuita [9, p. 353].

corrispondenza nel Mondo cioè che l'Etere fosse un oggetto: tale credenza era allora compatibile con la conoscenza acquisita. Ora non lo è più. Oggi, per esempio, riteniamo che, nel Mondo, esista un oggetto chiamato 'elettrone'. L'asserzione di esistenza dell'elettrone può essere formulata nel modo seguente:

Nel Mondo *esiste* un *quid* che corrisponde all'entità teorica 'elettrone': questo *quid* ha proprietà che corrispondono alle grandezze fisiche attribuite dalla teoria all'entità teorica 'elettrone'; questo *quid* si comporta in accordo alle leggi della teoria e le sue proprietà sono quantitativamente descritte dai valori misurati delle grandezze fisiche attribuite all'entità teorica 'elettrone'. Possiamo convenire che l'affermazione *l'elettrone esiste* è un'abbreviazione delle asserzioni precedenti.

Asserzioni di esistenza analoghe possono essere formulate per ogni entità teorica che pensiamo abbia, plausibilmente, corrispondenza nel Mondo.

Le asserzioni di esistenza di entità teoriche, come la conoscenza acquisita da cui derivano, hanno carattere storico, e quindi variano nel tempo; tuttavia la loro attendibilità cresce con il tempo ed esse tendono a divenire più stabili della conoscenza acquisita che le aveva suggerite. Per esempio: ai primi del Novecento, l'elettrone era dotato di massa e di carica, ma il suo ruolo nella costituzione della materia era ancora incerto, se non oscuro. Progressivamente, l'elettrone è divenuto parte integrante degli atomi ed ha acquisito tre nuove proprietà descritte da tre nuove grandezze fisiche: il momento angolare intrinseco (spin), il momento magnetico intrinseco e la lunghezza d'onda di de Broglie. Nel frattempo, le teorie che lo hanno descritto sono mutate e possiamo presumere che muteranno ancora: ciò non ostante, l'asserzione di esistenza dell'elettrone non solo è rimasta plausibile, ma la sua verosimiglianza si è consolidata nel tempo.

Talora, la verosimiglianza dell'asserzione di esistenza di una entità teorica, cioè della sua trasformazione in un oggetto del Mondo, è accompagnata dalla capacità di manipolare questo oggetto [10]. Si consideri, di nuovo, l'elettrone. I fisici hanno imparato ad estrarre elettroni dagli atomi (effetto fotoelettrico), ad usarli come sonde per studiare le proprietà della materia (riflessione e diffrazione di elettroni), come sostituti dei fotoni nel microscopio elettronico, a pilotarli nei transistor o nei superconduttori. Tuttavia, la capacità di manipolare un'entità teorica trasformata in oggetto da un'asserzione di esistenza non contribuisce a rendere plausibile tale asserzione: si pensi, ad esempio, alle onde elettromagnetiche che certamente abbiamo imparato a manipolare, ma la cui esistenza è, come vedremo, dubbia.

L'immagine del Mondo così definita deve essere chiaramente distinta dall'immagine fisica del Mondo cui faceva riferimento Planck. Questa, intesa come la descrizione fisica dei fenomeni che si svolgono nel Mondo, coincide con l'insieme delle teorie fisiche considerate come acquisite in una certa epoca storica. Mentre l'immagine fisica del Mondo rappresenta lo stato della conoscenza fisica – e, come tale, dovrebbe essere condivisa da ogni fisico – l'immagine del Mondo, contenendo asserzioni di esistenza, può anche essere diversa da fisico a fisico. La tensione che si stabilisce tra le due immagini del Mondo ha svolto e svolge un ruolo euristico fondamentale. L'insieme della conoscenza fisica considerata come acquisita (l'immagine fisica del Mondo) svolge, talora, un ruolo di conservazione che si manifesta anche come aperta ostilità nei confronti delle innovazioni concettuali; l'immagine del Mondo del singolo scienziato può invece, talora, svolgere un ruolo creativo. Il caso dell'invenzione dei quanti di luce, è, da questo punto di vista, esemplare (sezione IV.3).

I.2 Il significato di 'significato fisico'

Un 'significato fisico' può essere attribuito a diverse cose: entità teoriche, grandezze fisiche, singole asserzioni, insieme di asserzioni. Entità teoriche usate nell'Ottocento non sono più in uso; per esempio: calorico, Etere. È ragionevole pensare che, nell'Ottocento, queste entità teoriche avessero significato fisico, anche se oggi non l'hanno più. Si tratta, allora, di individuare un criterio per stabilire se un entità teorica abbia significato fisico. Questo criterio deve essere epistemologicamente rigido, ma storicamente flessibile, in modo tale da permettere che una entità teorica possa essere considerata dotata o no di significato fisico in epoche storiche diverse.

I.2.1 Entità teoriche

Adotteremo due criteri, suggeriti dalle riflessioni epistemologiche di Heinrich Hertz³.

• Criterio forte: un entità teorica ha significato fisico se la sua eliminazione riduce la capacità predittiva di una teoria.

³Scrive Hertz: «Mi sono pertanto sforzato di sviluppare in modo coerente le concezioni fisiche necessarie, partendo dalle equazioni di Maxwell, ma cercando d'altra parte di semplificare al massimo la teoria di Maxwell *eliminando o semplicemente non prendendo in considerazione quelle parti che possono essere tralasciate in quanto non possono influire su alcun possibile fenomeno* [11, p. 20 - 21; corsivo mio].»

• Criterio debole: un entità teorica ha significato fisico se la sua eliminazione riduce la capacità descrittiva o euristica di una teoria.

Un esempio significativo per l'applicazione del primo di questi criteri è fornito dal concetto di Etere. Ai tempi di Maxwell, il campo elettromagnetico era concepito come una deformazione meccanica dell'Etere. Anche prescindendo dalla teoria maxwelliana, la luce era concepita come un fenomeno ondulatorio che si sviluppa in un Etere. Quindi, l'Etere aveva allora un significato fisico perché la sua eliminazione avrebbe ridotto la capacità predittiva delle teorie ondulatorie della luce. Per quanto riguarda il secondo criterio (debole), possiamo considerare il concetto di spazio - tempo. La relatività speciale è nata e può tuttora essere presentata assiomaticamente senza l'uso del formalismo spazio - temporale. Tuttavia, è evidente che l'uso di questo formalismo accresce la capacità descrittiva della teoria. Altrettanto evidente è stato il ruolo euristico svolto dallo spazio - tempo di Minkowski per quanto riguarda la nascita della relatività generale.

L'attribuzione di un significato fisico ad una entità teorica non dipende dalla plausibilità o verosimiglianza dell'esistenza nel Mondo (come oggetto) dell'entità teorica stessa. Come vedremo, non è facile valutare la plausibilità dell'esistenza nel Mondo delle onde elettromagnetiche. Tuttavia, l'entità teorica 'onda elettromagnetica' ha significato fisico perché la sua eliminazione ridurrebbe drammaticamente la capacità predittiva della teoria elettromagnetica. Un altro esempio, ancora più illuminante, è costituito dal concetto di 'buca' (hole) usato nella fisica dello stato solido. Come è noto, una buca descrive, in determinate situazioni fisiche, il comportamento di molti elettroni. Non solo, noi siamo in grado di misurare proprietà fisiche ben definite di una buca quali la carica elettrica (+e), la massa effettiva, la mobilità elettrica. Ciò non ostante, possiamo ragionevolmente affermare che la buca non esiste nel Mondo, perlomeno nello stesso senso in cui affermiamo che esiste l'elettrone [12].

I.2.2 Grandezze fisiche

Da un punto di vista matematico, l'aspetto più importante di ogni fenomeno è quello di una grandezza misurabile [13, p. VI].

James Clerk Maxwell

Per quanto concerne le grandezze fisiche, incominciamo con l'osservare che non siamo interessati alla definizione astratta di una grandezza fisica, bensì al ruolo da essa svolto nella descrizione di un esperimento o all'interno di una teoria. Consideriamo, per esempio, la grandezza fisica data dal rapporto tra una energia e la velocità della luce. Essa ha le dimensioni di una quantità di moto: è quindi, formalmente, una grandezza fisica ben nota. Tuttavia, essa non accresce la nostra conoscenza se non siamo in grado di applicarla in un contesto fisico definito da un esperimento o da una teoria. Potremmo, per esempio, considerare il rapporto u/c dove u è la densità di energia di un'onda elettromagnetica; allora, u/c è la quantità di moto per unità di volume dell'onda. Oppure, potremmo considerare un fotone di energia E_{ph} ; allora, E_{ph}/c è la quantità di moto del fotone.

Come abbiamo osservato, le grandezze fisiche possono, almeno in linea di principio, essere misurate. Di solito, si ritiene che se una grandezza fisica può essere misurata, allora questa grandezza fisica ha 'significato fisico'. Tuttavia, è facile vedere come questo criterio non sia appropriato. Infatti, Maxwell ha mostrato come sia possibile misurare la rigidità dell'Etere partendo dalla misura dell'energia per unità di superfice e unità di tempo proveniente da Sole [14]. D'altra parte, la richiesta che le grandezze fisiche che compaiono nelle equazioni di una teoria possano essere misurate è ineludibile. È quindi ragionevole adottare i criterî seguenti. Una grandezza fisica ha significato fisico se essa soddisfa le seguenti condizioni:

- La sua eliminazione riduce la capacità predittiva di una teoria (criterio forte).
- La sua eliminazione riduce la capacità descrittiva di una teoria (criterio debole) ⁴.
- Essa può essere misurata, almeno in linea di principio.

I.3 Cosa significa interpretare una teoria fisica

La letteratura disponibile sull'argomento è assai vasta; il lettore interessato può vedere la voce 'The Structure of Scientific Theories' della *Stanford Encyclopedia of Philosophy* [15], i riferimenti bibliografici ivi contenuti, nonché il già citato volume curato da Frederik Suppe [7]. Qui ci limitiamo ad individuare due condizioni necessarie affinché una teoria fisica possa dirsi interpretata. Le due condizioni sono:

⁴Si osservi come, a differenza delle entità teoriche, il criterio debole non contenga alcun riferimento alla capacità euristica della teoria.

- 1. Individuare le grandezze fisiche da sottoporre a misura.
- Individuare le connessioni causali operanti nella teoria e nei fenomeni descritti dalla teoria. Innanzitutto, è necessario individuare le connessioni causali operanti nella teoria. Il trasferimento di queste connessioni causali nel Mondo deve essere fatto con cautela, perché esso implica – in generale, ma non sempre – l'esistenza nel Mondo, come oggetti, delle entità teoriche coinvolte.

La seconda condizione richiede una riflessione approfondita che permetta di illustrarne il significato e le implicazioni. Consideriamo, per esempio, la legge fondamentale della dinamica:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{I.1}$$

Questa equazione afferma che la variazione temporale della quantità di moto \vec{P} di un punto materiale all'istante *t* e nel punto *x*, *y*, *z* è uguale alla forza \vec{F} esercitata sul punto materiale nello stesso punto e nello stesso istante ⁵. Siccome la quantità di moto varia nel tempo, siamo inclini a interpretare l'equazione della dinamica dicendo che la forza \vec{F} 'causa' la variazione della quantità di moto \vec{P} ⁶. Se spingo una palla di biliardo in quiete, se cioè le applico una forza, allora la palla si muove e cambia la sua quantità di moto. Dico allora che la forza da me applicata alla palla ha causato la variazione della sua quantità di moto. Tuttavia, ci sono contesti fisici in cui la variazione della quantità di moto genera (causa) una forza. Si consideri, per esempio, una superfice materiale *S*, completamente assorbente, investita da un fascio di luce monocromatico perpendicolarmente ad essa (figura I.1). Se la superficie è completamente assorbente, possiamo scrivere che:

$$\frac{dP_x}{dt} = -N\frac{hv}{c} = F_x \tag{I.2}$$

dove N è il numero di fotoni assorbiti dalla superficie in un secondo ⁷. In questo caso diciamo che la variazione della quantità di moto dei fotoni ha

⁷Naturalmente, questa equazione vale se si suppone che l'energia e la quantità di moto dei fotoni assorbiti non venga dispersa sotto forma di calore nella superficie assorbente.

 $^{^5 \}rm Naturalmente,$ l'equazione (I.1) si applica, con le necessarie precisazioni, anche a corpi estesi.

⁶L'asserzione «l'applicazione della forza \vec{F} causa la variazione della quantità di moto $d\vec{P} = \vec{F}dt$ » dovrebbe essere completata affermando che «l'applicazione della forza \vec{F} causa la variazione della quantità di moto $d\vec{P} = \vec{F}dt$, in assenza di condizioni che ostacolino l'effetto della forza \vec{F} ». In generale, questa condizione aggiuntiva è sottintesa.



Figura I.1. La superficie *S*, completamente assorbente, è investita da un fascio monocromatico di fotoni. La variazione della quantità di moto dei fotoni assorbiti genera una forza sulla superficie *S*.

prodotto una forza F_x sulla superficie S⁸. Dobbiamo pertanto concludere che l'equazione della dinamica non contiene, di per sé, alcuna connessione causale. Una connessione causale può essere associata a questa equazione solo specificando il fenomeno fisico cui essa è applicata.

Le connessioni causali di cui stiamo parlando possiedono una proprietà peculiare. Esse derivano dalla interpretazione di una equazione matematica; per esempio, l'equazione della dinamica. Questa equazione è deterministica perché essa connette matematicamente ed in modo univoco i valori di due grandezze fisiche. Ciò significa che, scelta una delle due possibili interpretazioni della legge della dinamica sulla base del fenomeno oggetto di studio, l'effetto segue con certezza la causa⁹. Per esempio, se si tratta di una forza (causa) applicata ad un oggetto di massa nota inizialmente in quiete, la legge della dinamica ci permette di prevedere quale sarà, per esempio, la velocità dell'oggetto (effetto) dopo un certo intervallo di tempo. Ma questo vale solo se ci limitiamo all'ambito della teoria. Se intendiamo applicare l'equazione della dinamica ad un fenomeno che si svolge nel Mondo, dobbiamo innanzitutto verificare se la legge della dinamica è corroborata dall'esperimento cioè se le predizioni quantitative della legge sono confermate dalle misure con una accuratezza ragionevole. Ammettiamo che sia così. Possiamo allora affermare che, nel Mondo, l'applicazione di una forza ad un oggetto causa una variazione della sua velocità, se non sussistono circostanze che annullano l'effetto della forza applicata. Questo tipo di connessione causale è verificabile sperimentalmente. Non solo. Siccome la connessione causale in questione è ancorata ad una equazione matematica

⁸Un esempio storicamente antecedente a quello qui trattato, è costituito dalla teoria cinetica dei gas.

⁹Un'interpretazione causale di un'equazione prescinde dalle capacità di calcolo e dalla conoscenza approssimata delle condizioni iniziali. Le complicazioni introdotte da queste limitazioni riguardano la capacità predittiva basata sull'uso di equazioni e saranno discusse nella sezione I.4.

deterministica, siamo certi che essa sarà sempre attiva purché sia valido il postulato *P*2 relativo alla riproducibilità dei fenomeni. Chiamiamo questo tipo di connessioni causali *connessioni causali deterministiche*.

Le connessioni causali deterministiche debbono essere distinte dalle *connessioni causali empiriche*, cioè dalle connessioni causali suggerite solo dalla osservazione, in assenza di una equazione deterministica che descriva il fenomeno in esame. Una connessione causale empirica è meno attendibile di una connessione causale deterministica: il fatto di averla osservata per *n* volte non esclude la possibilità che la prossima volta l'ipotetica connessione causale sia inefficace.

A riprova del fatto che le connessioni causali non sono contenute nelle equazioni, ma sono sovrapposte ad esse tenendo conto della situazione sperimentale, si consideri l'equazione:

$$\frac{dx}{dt} = V \tag{I.3}$$

che descrive il moto uniforme di una particella lungo l'asse x. Questa equazione ha la stessa forma della legge della dinamica. Ci chiediamo se essa può essere interpretata in modo causale allo stesso modo. Possiamo affermare che la velocità V del punto è la causa della variazione della sua posizione, così come abbiamo affermato che la forza esercitata sulla particella è la causa della variazione della sua quantità di moto. Tuttavia, non ci sono contesti sperimentali per i quali possiamo affermare che la variazione della posizione del punto è la causa della sua velocità.

Più avanti, avremo occasione di estendere queste riflessioni a due equazioni di Maxwell, di solito interpretate causalmente: sono le equazioni riguardanti il rotore del campo elettrico ed il rotore del campo magnetico. Vedremo così come una interpretazione causale di queste equazioni non sia possibile (si veda a pagina 74 e a pagina 90).

In generale, una connessione causale implica una sequenza temporale, nel senso che la causa deve precedere temporalmente l'effetto. Di conseguenza, una causa non può essere simultanea all'effetto. È evidente come questa questione riguardi direttamente quelle equazioni della fisica che affermano che i valori di due funzioni, calcolate allo stesso istante, sono uguali. È questo il caso della legge della dinamica (I.1) e di molte altre equazioni. Per quanto riguarda la legge della dinamica, abbiamo mostrato come essa sia suscettibile di una interpretazione causale del tipo forza \rightarrow variazione della quantità di moto, oppure del tipo variazione quantità di moto \rightarrow forza, dove la freccia denota una connessione causale. Queste connessioni causali si manifestano, tuttavia, solo su intervalli di tempo diversi da zero. Infatti, interpretata causalmente, l'equazione della dinamica dovrebbe essere scritta sotto la forma:

$$d\vec{P} = \vec{F}dt \tag{I.4}$$

che, ponendo in evidenza il ruolo dell'intervallo di tempo dt, permette di interpretare questa equazione dicendo che la forza \vec{F} esercitata per un intervallo di tempo dt ha prodotto (causato) la variazione $d\vec{P}$ della quantità di moto. In questo modo causa ed effetto sono connesse attraverso un intervallo temporale diverso da zero. Ciò significa che le equazioni della fisica del tipo della (I.1), quando causalmente interpretate, non sono esempi di causalità simultanea, ma di causalità temporalmente ordinata. Infatti, da un punto di vista sperimentale, una variazione della quantità di moto può essere rivelata solo considerando i valori della quantità di moto in due istanti successivi. Esistono tuttavia situazioni in cui le equazioni della fisica possono essere interpretate come esempi di causalità simultanea: sono, per esempio, le equazioni che descrivono situazioni stazionarie o di equilibrio. Se tenendo una palla di biliardo in mano impediamo che la palla cada, diciamo che la forza esercitata dalla mia mano sulla palla, annullando la forza gravitazionale esercitata sulla palla, impedisce la caduta della palla (causa la non - caduta della palla).

I.3.1 Interpretazione di una teoria e meccanica quantica

Nel cercare di trarre inferenze sul futuro dal passato, noi procediamo sempre in questo modo. Costruiamo delle immagini o simboli degli oggetti esterni; e diamo loro una forma tale che le necessarie conseguenze delle immagini nel pensiero sono sempre le necessarie conseguenze nella natura delle cose descritte... Le immagini di cui stiamo parlando sono le nostre concezioni delle cose. Esse sono in conformità con le cose stesse sotto un aspetto importante: perché soddisfano la condizione suesposta. Non è necessario, per i nostri fini, che esse siano in conformità con le cose sotto ogni altro aspetto qualsivoglia. Infatti, noi non sappiamo, né possiamo sapere in alcun modo, se le nostre concezioni delle cose sono in conformità con esse sotto ogni altro aspetto che non sia questo unico fondamentale aspetto [16, p. 1].

Heinrich Hertz

I criteri proposti per interpretare una teoria possono apparire inadeguati nel caso della meccanica quantica per la richiesta, in essi contenuta, di individuazione 'delle connessioni causali operanti nella teoria e nei fenomeni descritti dalla teoria'. È quindi necessario mostrare come questa condizione possa essere applicata anche alla meccanica quantica. Peraltro, vedremo che anche la prima condizione necessaria per interpretare una teoria richiede una precisazione essenziale nel caso della meccanica quantica. Come esempio, prendiamo in considerazione la meccanica quantica non relativistica nella sua versione ondulatoria.

I.3.1.1 La meccanica quantica è una proto - teoria

La meccanica quantica è costituita da un insieme assiomatico di regole di calcolo che, se applicate ad un sistema fisico, permettono di calcolare i valori delle grandezze fisiche del sistema in esame. Il primo postulato della meccanica quantica afferma che la descrizione completa dello stato di un sistema fisico è assicurata da una funzione delle coordinate e della variabile tempo $\Psi(x, y, z, t)$, detta funzione d'onda o funzione di stato. Data una grandezza fisica *generica G* il suo valore medio (di aspettazione) è dato da: $\langle g \rangle = \int \Psi^* (\hat{g}\Psi) dx dy dz$, dove \hat{g} è l'operatore (hermitiano) corrispondente alla grandezza *G*. La meccanica quantica non è una teoria fisica definita perché, essendo applicabile a qualunque sistema fisico, non compaiono in essa grandezze fisiche specifiche (misurabili) ma solo grandezze fisiche generiche (astratte). Essa si trasforma in una teoria fisica definita solo quando

applicata ad un sistema fisico specifico, per esempio, all'atomo di idrogeno. In questo caso, le grandezze fisiche che vi compaiono sono, per esempio, la posizione, l'energia e la quantità di moto angolare dell'elettrone dell'atomo. È solo trasformandosi in una teoria definita che la meccanica quantica soddisfa la prima condizione richiesta per costruire una interpretazione di una teoria (p. 12): 'indicare quali sono le grandezze fisiche da sottoporre a misura'. Appare quindi evidente quale sia la differenza con le teorie della fisica classica. Oueste riguardano sistemi fisici specifici e le loro equazioni contengono le rispettive grandezze fisiche specifiche (misurabili): si pensi, per esempio, all'elettromagnetismo maxwelliano le cui equazioni fondanti riguardano i campi elettrico e magnetico o i potenziali elettromagnetici (potenziale scalare e potenziale vettore). La meccanica quantica è quindi una proto - teoria (o teoria in potenza) non suscettibile di alcuna interpretazione, in quanto priva di grandezze fisiche specifiche (che possono essere misurate). La cosiddetta 'interpretazione probabilistica' della meccanica quantica (Born, 1927) non è, ovviamente, una interpretazione: essa è solo una norma che indica come la funzione d'onda concorra, attraverso i postulati della teoria, a fare predizioni circa i valori che le grandezze fisiche possono assumere.

Dobbiamo ora verificare se e come la meccanica quantica possa soddisfare la seconda condizione richiesta per interpretare una teoria (p. 12): 'individuare le connessioni causali operanti nella teoria e nei fenomeni descritti dalla teoria'.

L'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

$$\frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Psi(\vec{r},t)$$
(I.5)

ha la stessa struttura matematica dell'equazione della dinamica. Possiamo quindi interpretarla allo stesso modo: il termine $\hat{H}\Psi$ *causa* la variazione temporale della Ψ ? La risposta è negativa. La differenza risiede nel fatto che nel caso della dinamica la connessione causale è stabilita tra grandezze fisiche misurabili, mentre nella meccanica quantica la connessione è stabilita tra la funzione d'onda Ψ e operatori hamiltoniani operanti sulla Ψ . Più correttamente: mentre le equazioni della fisica classica descrivono, se interpretate, connessioni causali tra grandezze fisiche, le equazioni della prototeoria 'meccanica quantica' stabiliscono solo connessioni deterministiche tra elementi della proto-teoria (cioè dell'algoritmo).

La meccanica quantica fornisce predizioni in termini di probabilità; ma queste probabilità obbediscono ad equazioni deterministiche: senza questa caratteristica fondamentale non sarebbe possibile fare predizioni quantitative. Emerge qui una differenza essenziale tra 'connessione deterministica' e 'connessione causale'. Una connessione deterministica è quella intrinseca ad una equazione matematica: essa è quindi riconoscibile 'a vista' e non presuppone alcuna interpretazione dell'equazione. Per esempio, l'equazione della dinamica (I.1) e l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo (I.5) stabiliscono una connessione deterministica tra i due membri dell'equazione. Tuttavia per trasformare questa connessione deterministica in una connessione causale è necessario interpretare le due equazioni applicate però ad una situazione sperimentale definita: si riveda, a proposito, la discussione dell'equazione della dinamica.

Sovente, le equazioni della meccanica quantica forniscono la probabilità che un evento si verifichi. Per esempio, se un atomo di idrogeno è investito da un fascio di luce, la probabilità per unità di tempo che l'atomo, inizialmente nello stato fondamentale, passi ad uno stato eccitato, è data da:

$$P_{1 \to m} = \frac{8\pi^3}{3h^2} |R_{1m}|^2 u(v_{1m}) \tag{I.6}$$

dove R_{1m} è l'elemento di matrice di dipolo elettrico tra i due stati imperturbati 1 e *m* e $u(v_{1m})$ è l'energia del campo elettromagnetico dell'onda luminosa per unità di volume e di frequenza alla frequenza di transizione v_{1m} ¹⁰. L'equazione (I.6) non è verificabile sperimentalmente in modo diretto: dovremmo infatti essere in grado di effettuare un esperimento con un singolo atomo. Tuttavia, possiamo legittimamente chiederci come possiamo interpretarla causalmente. Possiamo dire che la causa della transizione tra i due stati è l'assorbimento di energia del campo elettromagnetico dell'onda da parte dell'atomo. O meglio, in termini di fotoni, che la causa della transizione è l'assorbimento di un fotone di energia opportuna da parte dell'atomo. Questa causa, tuttavia, diventa operativa solo con una certa probabilità, data dalla (I.6). Se operativa, la causa (assorbimento del fotone) produce con certezza l'effetto (la transizione dell'atomo da uno stato energetico all'altro).

Per sottoporre a verifica sperimentale la (I.6) dobbiamo avere a disposizione un gas (o un fascio) di atomi di idrogeno ed un fascio di luce sufficientemente esteso e dobbiamo riscriverla così:

$$N_a P_{1 \to m} = \frac{8\pi^3}{3h^2} |R_{1m}|^2 N_{ph} h v_{1m} \tag{I.7}$$

 $^{^{10}\}mathrm{La}$ (I.6) può essere ricavata usando l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo con il metodo perturbativo.

dove N_a è il numero di atomi per unità di volume e N_{ph} la densità dei fotoni corrispondenti alla frequenza v_{1m} (numero di fotoni per unità di volume e di frequenza). Allora, $N_a P_{1 \rightarrow m}$ è il numero di atomi per unità di volume che effettuano una transizione nell'unità di tempo. Questa disposizione sperimentale mostra come il carattere probabilistico insito nella (I.7) riguarda la probabilità che uno degli atomi del gas (o del fascio) assorba un fotone; se l'assorbimento si verifica, allora l'atomo, con certezza, passa dallo stato fondamentale a quello eccitato.

È interessante analizzare anche l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, riguardante però una teoria, cioè la proto - teoria applicata a un sistema fisico specifico. Nel caso dell'atomo di idrogeno, essa assume la forma:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi(r,\theta,\phi) = E\psi(r,\theta,\phi)$$
(I.8)

Come è ben noto, essa conduce a valori dell'energia permessi per l'elettrone identici a quelli previsti dal modello di Bohr:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{\mu e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2}$$
(I.9)

Possiamo incominciare affermando che l'interazione coulombiana tra elettrone e protone *determina* i valori permessi dell'energia dell'elettrone.



Figura I.2. I varî contributi ai primi due livelli dell'atomo di idrogeno (non in scala). In termini di connessioni causali (si veda il testo), la didascalia della figura deve essere letta con queste sostituzioni: Schrödinger \rightarrow interazione coulombiana; Dirac \rightarrow correzione relativistica + interazione spin - orbita; Lamb \rightarrow fluttuazioni e polarizzazioni del 'vuoto'; iperfine \rightarrow interazione tra il momento magnetico dell'elettrone e quello del protone.

Possiamo poi sostituire al verbo 'determina' il verbo 'causa'? Il punto di domanda è giustificato dal fatto che l'equazione (I.8) non contiene la varia-
bile tempo: si tratterebbe quindi di una causa simultanea. Se prendiamo in considerazione il fenomeno della cattura di un elettrone da parte di un protone (come fece Bohr nel suo lavoro del 1913 [17]) possiamo tuttavia affermare che 'l'interazione coulombiana causa la cattura dell'elettrone in uno degli stati energetici individuati dall'equazione (I.8)': in questo caso, la connessione causale prevede una successione temporale ¹¹.

È significativo il fatto che questo approccio alle connessioni causali 'apparentemente simultanee' sia implicitamente adottato nei manuali a proposito della descrizione dei varî contributi ai livelli energetici dell'atomo di idrogeno (figura I.2).

I.3.2 Dispositivi quantici

Le connessioni causali operanti in sistemi fisici quantici sono bene illustrate dal funzionamento dei dispositivi quantici. Il funzionamento di tutti i dispositivi quantici è descritto da equazioni in cui compaiono grandezze fisiche macroscopiche e queste equazioni sono interpretabili in termini di connessioni causali. Nella pratica quotidiana, queste connessioni causali assicurano il funzionamento dei dispositivi. Consideriamo, per esempio, un LED (Light Emitting Diode). Esso è costituito da una giunzione p - n creata in un semiconduttore opportuno. Se la giunzione è polarizzata in modo diretto (applicando una differenza di potenziale positiva tra la parte p e la parte n della giunzione), la giunzione sarà attraversata da una corrente elettrica data da:

$$J = J_i (e^{e\Delta V/k_B T} - 1)$$
(I.10)

dove e è la carica elettronica e J_i è data da:

$$J_i = \frac{eD_n n_p}{L_n} + \frac{eD_p p_n}{L_p} \tag{I.11}$$

 $n_p e p_n$ sono le concentrazioni dei portatori di minoranza all'equilibrio termico; $D_n e D_p$ i coefficienti di diffusione per gli elettroni e le buche; $L_n e L_p$ le lunghezze di diffusione degli elettroni in materiale p e delle buche in materiale n. La corrente data dalla (I.10) è costituita da elettroni che passano dalla parte n alla parte p e da buche che passano dalla parte p alla parte n. L'emissione di luce è dovuta alla 'ricombinazione' elettrone – buca, cioè ad una transizione di un elettrone dalla banda di conduzione alla banda di valenza con conseguente emissione di un fotone. Questa descrizione del funzionamento del LED contiene, implicitamente, diverse connessioni causali

 $^{^{11}{\}rm L'}{\rm effetto}$ finale della causa (l'interazione coulombiana) è la costituzione dell'atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale.

che assicurano il suo funzionamento: la applicazione di una differenza di potenziale opportuna (polarizzazione diretta) *causa* una corrente di elettroni e buche; la ricombinazione di coppie elettrone - buca *causa* l'emissione di fotoni. Ognuno dei processi elementari coinvolti ha una probabilità di verificarsi minore di uno, ma al fine del funzionamento del dispositivo, la cosa importante è che questa probabilità non sia nulla e che l'efficienza del dispositivo sia tanto più elevata quanto più questa probabilità si avvicina a uno.

Queste connessioni causali operano nella descrizione dei fenomeni, cioè nella teoria. Il funzionamento del LED rende verosimile che, nel Mondo, operino connessioni causali *corrispondenti* a quelle operanti nella teoria.

I.4 Causalità, determinismo, predicibilità

La più famosa enunciazione di questo insieme di problemi è dovuta a Laplace:

Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'Universo come l'effetto del suo stato anteriore e come la causa di quello che verrà [Connessione causale tra passato presente e futuro]. Una intelligenza che, ad un certo istante, conosca tutte le forze che animano la natura e la rispettiva situazione degli esseri che la compongono – ammesso che essa sia sufficientemente vasta da poter sottomettere questi dati all'analisi - racchiuderebbe nella medesima formula i movimenti dei corpi più grandi dell'Universo e quelli dell'atomo più leggero: nulla le sarebbe ignoto e l'avvenire come il passato sarebbe presente ai suoi occhi [Predicibilità ideale]. Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all'Astronomia, una debole immagine di questa intelligenza. Le sue scoperte in Meccanica e in Geometria, congiunte a quelle della gravitazione universale, l'hanno posto nella condizione di racchiudere nelle medesime espressioni analitiche gli stati passati e futuri del sistema del Mondo. Applicando lo stesso metodo a qualche altro oggetto della sua conoscenza, esso è riuscito a ricondurre a leggi generali i fenomeni osservati, e a prevedere quelli che le circostanze date debbono fare sbocciare. Tutti i suoi sforzi nella ricerca della verità, tendono ad avvicinarlo incessantemente all'intelligenza che abbiamo concepito, ma dalla quale esso rimarrà per sempre infinitamente lontano [Limiti della conoscenza umana]. Questa tendenza, propria della specie umana, è quella che la rende superiore agli animali; e i suoi progressi in questo ambito distinguono le nazioni e i secoli e costituiscono la loro vera gloria ¹²[18, p. 3 - 5].

¹²Gli inserti tra parentesi quadre sono, naturalmente, miei.

Per Laplace, la causalità è immanente all'Universo e, quindi, ad ogni fenomeno naturale. La causalità insita in ogni fenomeno naturale è il presupposto per la possibilità di una descrizione dei fenomeni mediante equazioni matematiche che sono, per loro natura, deterministiche. In linea di principio, se si conoscessero le condizioni dell'Universo ad un certo istante, sarebbe possibile predire in ogni dettaglio il suo futuro e ricostruire il suo passato. Si noti come Laplace tratti passato e futuro allo stesso modo, ancorando questa posizione – con il riferimento al sistema del Mondo regolato dalle leggi della geometria, della meccanica e della gravitazione – all'invarianza temporale delle leggi della meccanica.

Gli sviluppi successivi della fisica hanno reso assai problematica questa visione. Innanzitutto per l'avvento della seconda legge della termodinamica secondo cui l'entropia dell'Universo aumenta, introducendo così una asimmetria tra passato e futuro. In secondo luogo perché non è possibile conoscere, *allo stesso istante*, lo stato dell'Universo. Infatti, dato che le interazioni fisiche si propagano con velocità finita, 'allo stesso istante' è una frase che si applica solo a punti molto vicini a quello in cui si trova l'orologio (coincidenti con quello in cui si trova l'orologio). Quindi, tutte le informazioni che possiamo avere su ciò che accade in punti lontani da quello in cui si trova l'orologio riguardano il passato. Infine perché, stante l'attuale meccanica quantica, dato un sistema fisico, le predizioni circa i valori che le sue grandezze fisiche possono assumere sono espresse, in generale, solo in termini di probabilità.

Laplace pone bene in evidenza il rapporto tra descrizione deterministica basata su equazioni matematiche e predicibilità. Si ha una descrizione deterministica quando, dato un insieme di condizioni iniziali arbitrario del sistema fisico in esame, le equazioni che lo descrivono hanno una ed unica soluzione, esatta o approssimata ¹³. Nel caso della meccanica, la predicibilità dipende dalla conoscenza delle condizioni iniziali del sistema e dalle capacità di calcolo a disposizione. Consideriamo, per esempio, l'interazione gravitazionale tra due corpi sferici (o due punti materiali). Il problema può essere formulato nel modo seguente. Dati due corpi sferici e date con esattezza le loro condizioni iniziali (posizione, velocità e momento angolare) è possibile predire esattamente i loro moti? Sappiamo che Newton ha fornito per primo la risposta e che essa è affermativa. Sappiamo anche che il

¹³Purché l'approssimazione possa essere espressa come somma di termini $\alpha^n \operatorname{con} \alpha \ll 1$ e *n* intero ≥ 1 (in modo che i termini con *n* sufficientemente grande possano essere trascurati in funzione dell'accuratezza dello strumento di misura).

sistema di equazioni usato utilizza la legge della dinamica e la legge di gravitazione newtoniane. Con una precisazione essenziale: la forza di attrazione reciproca tra i due corpi è calcolata tenendo conto delle posizioni istantanee dei due corpi, supponendo cioè che l'interazione gravitazionale si propaghi con velocità infinita. Quindi, all'interno della dinamica e della legge di gravitazione newtoniane, la descrizione di due corpi sottoposti alla reciproca attrazione gravitazionale è deterministica. Se si abbandona l'ipotesi di interazioni fisiche che si propagano con velocità infinita, la soluzione newtoniana del moto di due corpi sottoposti alla reciproca attrazione gravitazionale non può essere corretta. La teoria della relatività generale abbandona l'ipotesi di interazioni fisiche con velocità infinita. Tuttavia, la relatività generale fornisce una soluzione del moto solo per una massa 'di prova' cioè per una massa sufficientemente piccola da poter trascurare la deformazione dello spazio - tempo da essa prodotta. Una soluzione approssimata del problema dei due corpi è allora possibile solo per campi gravitazionali sufficientemente deboli e velocità sufficientemente piccole rispetto a quella della luce. Ci troviamo pertanto di fronte a questa situazione: la dinamica e la gravitazione newtoniane forniscono una soluzione esatta del problema dei due corpi; la relatività generale fornisce solo una soluzione approssimata. Il confronto con l'osservazione sperimentale riguardante la precessione del perielio di Mercurio corrobora la predizione della relatività generale, non ostante il fatto che essa sia una soluzione approssimata.

Verso la fine dell'Ottocento, Henry Poincaré ha dimostrato che il problema di tre corpi sottoposti alla reciproca interazione gravitazionale newtoniana non ha soluzioni analitiche [19]: quindi, le rispettive traiettorie non sono predicibili con esattezza¹⁴. Inoltre, variando di poco le condizioni iniziali, le traiettorie finali sono molto diverse. È interessante, a questo proposito, confrontare il brano di Laplace con il seguente, di Poincaré ¹⁵:

Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, noi potremmo predire esattamente la situazione di questo stesso universo a un istante successivo. Ma, anche quando le leggi della natura non avessero più segreti per noi, noi potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente [*Limite apparentemente innocuo*]. Se questo ci permette di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, è tutto quello che ci serve; diciamo allora che il fenomeno è stato previsto, che esso

¹⁴Il problema dei tre corpi è stato inizialmente posto da Newton nei *Principia* in riferimento al caso Sole – Terra – Luna. Per una recente rassegna, si veda [20].

¹⁵I due testi sono separati da un secolo circa.

è descritto da leggi; ma, non è sempre così, perché può darsi che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne comportino di molto grandi nei fenomeni finali; un piccolo errore nelle prime produrrebbe un errore enorme sulle ultime. La predizione diventa impossibile e noi abbiamo un fenomeno casuale [*Non predicibilità*] ¹⁶ [21, p. 68 - 69].

Poincaré, diversamente da Laplace, considera l'intero Universo dall'istante iniziale: evita così il problema legato alla velocità di propagazione finita delle interazioni fisiche, problema invece presente nella descrizione di Laplace. Oggi, un comportamento aperiodico a lungo termine di un sistema fisico descritto da equazioni deterministiche ma fortemente sensibile alle condizioni iniziali è detto caotico. In questi casi, si parla, usando un apparente ossimoro, di caos deterministico.

È quindi necessario distinguere tra descrizioni deterministiche e sistemi fisici deterministici. Siccome le condizioni iniziali non possono essere note con precisione assoluta e, in ogni caso, i dati numerici inseriti in un calcolatore sono comunque approssimati, la predicibilità del comportamento di sistemi fortemente sensibili alle condizioni iniziali diventa impossibile.

Una situazione diversa è quella della meccanica quantica. In essa, la probabilità che un fenomeno avvenga o la probabilità dell'esito di una misura obbediscono ad equazioni deterministiche; ma i sistemi fisici descritti da queste equazioni non sono deterministici perché, a parità di condizioni iniziali (funzione di stato iniziale), l'esito finale è noto solo con una certa probabilità.

È utile riassumere le riflessioni svolte con un quadro esplicativo delle definizioni usate.

- 1. *Descrizione deterministica*. È una descrizione, generalmente matematica, con una sola soluzione.
- 2. *Sistema deterministico*. L'evoluzione del sistema è univocamente determinato dallo stato iniziale. La sua descrizione logico - matematica ha una sola soluzione. L'evoluzione del sistema è quindi predicibile.
- 3. *Sistema caotico*. Sistema descritto deterministicamente, ma fortemente sensibile alle condizioni iniziali. La sua evoluzione non è predicibile.
- 4. *Descrizione causale*. Descrizione deterministica interpretata causalmente.

¹⁶Inserti tra parentesi quadre miei.

Giuseppe Giuliani - Elettromagnetismo relatività quanti

- 5. Sistema causale. Sistema deterministico descritto causalmente.
- 6. *Connessione causale deterministica*. Descritta da equazioni interpretate causalmente.
- 7. *Connessione causale empirica*. Basata sulla ripetizione di esperimenti o osservazioni.

I.5 Il significato di 'legge fisica'

Per 'legge fisica' intendiamo una asserzione che connette, preferibilmente in modo quantitativo mediante un'equazione, il valore di due o più grandezze fisiche. Riferendoci a 'leggi fisiche' espresse mediante un'equazione, richiediamo che l'equazione soddisfi la condizione di località. Un'equazione soddisfa la condizione di località se:

- connette i valori di grandezze fisiche in un punto dello spazio allo stesso istante;
- oppure, se connette i valori di grandezze fisiche in due punti distinti dello spazio in due istanti successivi t_1 e t_2 , purché la distanza d tra i due punti non sia superiore a $c(t_2 t_1)$.

Siccome nessuna interazione fisica si può propagare a velocità superiori a quella della luce nel vuoto, la condizione di località implica che non è possibile stabilire una connessione causale tra due eventi che sono separati da una distanza maggiore di $c(t_2 - t_1)$, dove t_2 e t_1 sono gli istanti in cui accadono i due eventi.

Capitolo II

Il tempo: una grandezza fisica peculiare

Anche il tempo non esiste di per sé, ma dalle cose stesse deriva il senso di ciò che si è svolto, di ciò che è presente, di ciò che seguirà. Bisogna riconoscere che nessuno avverte il tempo di per sé, separato dal movimento e dalla placida quiete delle cose [23, libro I, 459 - 463].

Lucrezio

II.1 Che cosa è il tempo?

Abbiamo affermato che le grandezze fisiche descrivono proprietà di entità teoriche e che esse sono misurabili. Allora, che cosa è il tempo? Se è una grandezza fisica, di quale entità teorica descrive una proprietà? E come si misura?

Usualmente si dice che "il tempo è misurato dagli orologi", così come, per esempio, "la corrente elettrica è misurata dagli amperometri". C'è, tuttavia, una differenza fondamentale. Un amperometro misura una proprietà di un quid distinto da sé e il processo di misura è costituito da un'interazione fra il quid e l'amperometro: lo stato dell'amperometro viene modificato dal processo di misura. Gli orologi, invece, mostrano semplicemente i loro numeri o la posizione delle loro lancette: non c'è alcun quid, distinto dall'orologio, una cui proprietà (grandezza fisica) è oggetto della misura. Ovviamente, i numeri mostrati da un orologio basato su un fenomeno periodico che si svolge al suo interno è il risultato di un conteggio, cioè, di una misura. Tuttavia, questa misura riguarda proprietà dell'orologio e non di un quid distinto da esso. Per meglio chiarire questo punto, consideriamo da un lato la legge di Ohm $\Delta V = Ri$: l'amperometro, costruito secondo i dettami dell'elettromagnetismo, misura la grandezza *i* che compare in questa equazione; e, dall'altro, l'equazione s = Vt: la variabile *t* non è misurata da un orologio ma generata e mostrata da esso.

La vasta letteratura sulla concezione del tempo¹ non dovrebbe oscurare il fatto che, nella fisica moderna, il tempo è una variabile matematica che compare nelle equazioni e che, dal punto di vista sperimentale, è *generata* e *mostrata* da un orologio. Nel primo capitolo dei *Principi della meccanica*, Hertz scrive:

Il tempo del primo capitolo è il tempo della nostra intuizione. Esso è, pertanto, una grandezza tale che le variazioni delle altre grandezze possono essere considerate come dipendenti dalla sua variazione; mentre esso è, di per sé, una variabile indipendente [16, p. 45].

L'avvento della relatività speciale ha modificato questo punto di vista assumendo che ogni SRI ha la propria variabile t generata e mostrata da un orologio.

In un laboratorio, possiamo associare ad ogni numero mostrato da un orologio il valore simultaneo di una grandezza fisica misurata vicino all'o-rologio (dove si trova l'orologio) ²; così possiamo tracciare il valore della grandezza misurata in funzione della variabile *t* mostrata dall'orologio. Per esempio, su una carta millimetrata che si muove a velocità costante lungo la direzione *x*, un pennino può tracciare, lungo la direzione *y*, i valori misurati della grandezza fisica. Questo esempio illustra con efficacia uno dei ruoli svolti da un orologio nelle misure fisiche: lungo la direzione *x* non stiamo misurando alcunché; stiamo solo generando i valori della variabile *t*.

D'altra parte, con un orologio possiamo misurare la durata di un fenomeno o processo che si sta sviluppando nelle vicinanze dell'orologio (dove si trova l'orologio). Per questo, dobbiamo definire l'evento iniziale e l'evento finale del fenomeno: simultaneamente al verificarsi dell'evento iniziale

¹Si è valutato che i testi (articoli o libri) pubblicati tra il 1900 e il 1980 e potenzialmente rilevanti per uno studio sistematico del concetto di tempo siano circa 65000. Si veda [24, p. 234 - 270].

²Il concetto di *simultaneità locale* è primitivo: non è definibile e deve essere considerato come una acquisizione del nostro patrimonio culturale. La simultaneità qui usata si dice locale perché relativa ad eventi che accadono nello stesso punto.

e finale del fenomeno, leggiamo il numero t_i e t_f mostrato dall'orologio; per definizione, la durata del fenomeno è data da $t_f - t_i$. Quindi, con un orologio, possiamo dare un valore quantitativo al concetto di durata di un fenomeno, concetto che sussiste comunque nella nostra cultura, indipendentemente dalla possibilità di una sua misura quantitativa. Questi esempi non esauriscono l'uso della variabile t in fisica: si pensi, ad esempio, ai modelli cosmologici, dove, tuttavia, il significato e l'uso della variabile tempo pone una serie di questioni epistemologiche [25].

II.2 Orologi ideali e orologi reali

Nella precedente sezione abbiamo discusso l'esempio dell'amperometro: la sua costruzione si basa su prescrizioni della teoria elettromagnetica e ha come scopo la misura della corrente elettrica. In generale, un apparato di misura è dedicato alla misura di una grandezza fisica e la sua costruzione segue le prescrizioni della teoria in cui tale grandezza fisica compare, oppure ricorre a conoscenze di sfondo. Come abbiamo visto, gli orologi non misurano una proprietà di qualcosa distinto da sé: la loro funzione è quella di generare i valori della variabile tempo. Pertanto, non ci sono prescrizioni riguardanti la loro costruzione ad eccezione di quella, essenziale, che i valori della variabile tempo generati debbono riflettere il più accuratamente possibile l'omogeneità della variabile matematica t. Per soddisfare al meglio questa condizione si confrontano differenti classi di orologi e la classe migliore è scelta sulla base di una valutazione empirica guidata dalle teorie che descrivono il funzionamento di ogni classe di orologi.

Definiamo ideale un orologio il cui periodo fondamentale non è modificato da alcuna interazione fisica. Purtroppo, il periodo fondamentale degli orologi reali è modificato da molte interazioni fisiche. Gli orologi considerati, direttamente o indirettamente, nelle teorie fisiche sono orologi ideali. Il fatto che gli orologi usati negli esperimenti siano orologi reali è una questione che riguarda gli sperimentatori: è compito loro tenere conto dell'influenza dell'ambiente fisico sul funzionamento degli orologi usati. Costituisce un'importante eccezione la teoria della relatività generale: questa teoria richiede di considerare la dipendenza del periodo fondamentale di un orologio dalla gravità anche a livello teorico.

II.2.1 Come è fatto un orologio

Ogni orologio utilizza una frequenza campione, un contatore e un sistema di visualizzazione del conteggio effettuato dal contatore. Per esempio, in un orologio a pendolo, la frequenza campione è data dall'inverso del periodo di oscillazione del pendolo, mentre il contatore è costituito da un sistema meccanico che trasforma il conteggio delle oscillazioni complete del pendolo nel movimento discreto delle lancette dell'orologio che visualizzano il risultato del conteggio. In un orologio 'atomico' al ^{133}Cs , la frequenza campione è costituita dalla frequenza della radiazione assorbita dalla transizione tra due i livelli iperfini dello stato fondamentale del cesio, mentre il contatore è di natura elettronica e il visualizzatore è digitale. In un orologio al cesio, gli atomi di cesio assorbono le onde elettromagnetiche (microonde) prodotte da uno strumento pilotato in frequenza da un oscillatore al quarzo 'bloccato' in frequenza - mediante un circuito di retroazione - dal segnale dovuto all'assorbimento delle microonde da parte degli atomi di cesio. Più in dettaglio: l'oscillatore al quarzo, operante intorno a 10 Mhz, pilota - attraverso un moltiplicatore di frequenza - il generatore delle microonde necessarie per attivare la transizione iperfine. Nel 1967, la Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure (CGPM) ha stabilito che «il secondo è la durata di 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio»³.

II.3 Il tempo nella relatività speciale

Gli orologi presi in considerazione dalla relatività speciale sono orologi ideali: il loro periodo fondamentale non è modificato da alcuna interazione fisica; tanto meno, dal fatto di trovarsi in moto inerziale. Anche il periodo fondamentale di un orologio reale, per il principio di relatività, non può essere modificato dal fatto che l'orologio si trovi in moto inerziale.

II.3.1 I postulati della relatività speciale

Il principio universale della teoria della relatività ristretta è contenuto nel postulato: le leggi della fisica sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz (nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro, scelto arbitrariamente). Questo è un principio restrittivo delle leggi naturali, paragonabile al principio restrittivo della non - esistenza del perpetuum mobile, che sta alla base della termodinamica [26, p. 88].

Albert Einstein

³Da allora, la produzione di orologi che usano transizioni atomiche come standard di frequenza si è evoluta: oggigiorno, orologi basati su transizioni nella regione ottica in ioni o atomi intrappolati forniscono prestazioni superiori a quelle degli orologi al cesio e si propongono come nuovi possibili standard dell'unità di tempo.

I postulati assunti da Einstein sono [27, trad. it.]:

- 1. Omogeneità del tempo (della variabile tempo)
- 2. Omogeneità e isotropia dello spazio
- 3. Principio di relatività (principio di invarianza): ogni fenomeno fisico si svolge allo stesso modo in ogni SRI 4
- 4. La velocità della luce è la stessa in ogni SRI 5

Si osservi come i primi tre postulati siano gli stessi che stanno alla base della fisica galileiana e newtoniana. Tradizionalmente si distingue tra principio di relatività galileiano e einsteiniano in quanto il primo riguarderebbe solo i fenomeni meccanici mentre il secondo si riferisce a tutti i fenomeni fisici. Tuttavia questa distinzione trascura il fatto che, ai tempi di Galileo, solo i fenomeni meccanici erano riconosciuti come appartenenti al dominio della fisica. Inoltre, lo spazio considerato da Einstein è lo spazio euclideo. Queste considerazioni ci portano alla conclusione che la vera rottura concettuale con la fisica precedente è costituita dal quarto postulato, cioè dalla costanza della velocità della luce, o meglio, dal riconoscimento che la velocità della luce è una velocità limite.

I postulati di Einstein conducono alle trasformazioni di coordinate cosiddette di Lorentz che sostituiscono quelle cosiddette di Galileo (tabella II.1).

Confrontando a vista le due trasformazioni appare evidente il ruolo svolto dalla velocità limite: se questa fosse infinita, le trasformazioni di Lorentz si ridurrebbero a quelle di Galileo. Subito dopo la comparsa della relatività speciale è stato posto il problema se sia possibile pervenire alle trasformazioni di coordinate di Lorentz anche lasciando cadere il quarto postulato.

⁴Denominare questo principio di 'invarianza' invece di 'relatività' equivale a privilegiare ciò che non varia passando da un sistema di riferimento ad un altro rispetto a ciò che varia. Corollario immediato del principio di invarianza è che 'le leggi fisiche hanno la stessa forma matematica in ogni SRI'.

⁵Questo postulato può essere sostituito dal seguente: sono valide le equazioni di Maxwell per il vuoto. Essendo le equazioni di Maxwell invarianti per trasformazioni di Lorentz, ne segue immediatamente che la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale.

Lorentz	Galileo
$x = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right] (x' + Vt')$	x = (x' + Vt)
y = y'	y = y'
z = z'	z = z'
$t = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right] (t' + V/c^2) x'$	t = t'

Tabella II.1. Trasformazioni delle coordinate di Lorentz e di Galileo. Le coordinate accentate sono quelle del sistema di riferimento considerato in moto con velocità *V* lungo la direzione positiva dell'asse $x \equiv x'$.

Carlo Cattaneo ha mostrato che, partendo dalle equazioni:

$$x' = x'(x, y, z, t)
 y' = y'(x, y, z, t)
 z' = z'(x, y, z, t)
 t' = t'(x, y, z, t)$$
(II.1)

e usando l'omogeneità della variabile tempo, l'omogeneità e isotropia dello spazio ed un principio di relatività ridotto (solo cinematico), si ottengono le seguenti trasformazioni di coordinate [28]⁶:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/\alpha}} (x - Vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/\alpha}} \left(t + \frac{V}{\alpha}x\right)$$
(II.2)

dove α è un parametro diverso da zero. Nel corso della deduzione, si ricava anche la seguente equazione:

$$u_x' = \frac{u_x - V}{1 + u_x V/\alpha} \tag{II.3}$$

⁶Una rielaborazione della derivazione di Cattaneo si trova in [29, p. 42].

dove $u'_x = dx'/dt'$ e $u_x = dx/dt$ sono le componenti della velocità di un punto lungo l'asse $x \equiv x'$ valutate nei due sistemi di riferimento. Dalle (II.2, II.3) si deduce che $|\alpha|$ ha le dimensioni del quadrato di una velocità.

Le trasformazioni di coordinate date dalle (II.2) lasciano indeterminato il parametro α che, come si è visto, deve essere *diverso da zero*. Si consideri inizialmente il caso di $\alpha < 0$. Ponendo $\alpha = -\kappa^2$, le (II.2) diventano:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/\kappa^2}} (x - Vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/\kappa^2}} \left(t - \frac{V}{\kappa^2}x\right)$$
(II.4)

e la regola di composizione delle componenti della velocità lungo il comune asse $x \equiv x'$ (II.3) assume la forma:

$$u_x' = \frac{u_x - V}{1 - u_x V/\kappa^2} \tag{II.5}$$

Si noti che se $u_x = \kappa$, allora anche $u'_x = \kappa$: κ è una velocità limite. Le trasformazioni di coordinate (II.4) possono essere chiamate trasformazioni simil – Lorentz perché sono identiche alle trasformazioni di Lorentz in cui però la velocità limite *c* è sostituita da una velocità limite κ da determinarsi.

Si esamini ora il caso di $\alpha > 0$, considerando il seguente esperimento ideale. Nel sistema di riferimento K', un segnale viene inviato dal punto x'_1 all'istante t'_1 nella direzione positiva dell'asse x'; si supponga che esso giunga in x'_2 all'istante t'_2 . Nel sistema di riferimento K, l'intervallo di tempo che separa i due eventi, arrivo e partenza del segnale, sarà dato da:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/\alpha}} \left(\Delta t' - \frac{V}{\alpha} \Delta x' \right)$$

Se $\alpha > 0$, quando:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \delta' > \frac{\alpha}{V}$$

si ottiene che $\Delta t < 0$ ($\delta' = \Delta x' / \Delta t'$ è la velocità del segnale nel sistema di riferimento *K'*). Nel sistema di riferimento *K* l'arrivo del segnale risulterebbe precedere la sua partenza: verrebbe quindi violato il principio di causalità. Si segnala tuttavia che anche la regola di composizione delle velocità fornisce risultati inaccettabili. Dalla:

$$u_x = \frac{u_x' + V}{1 - u_x' V / \alpha}$$

segue infatti che $u_x = \infty$ per $u'_x V = \alpha$; inoltre si avrebbe $u_x < 0$ quando u'_x e *V* sono entrambi positivi e $u'_x V > \alpha$.

La derivazione di Cattaneo e i suoi risultati sollecitano alcune riflessioni:

- Oltre ai postulati di omogeneità e isotropia e a un postulato di invarianza ridotto (cinematico), essa usa solo il concetto di velocità.
- Essa conduce a due possibili trasformazioni di coordinate, a seconda che il parametro $\alpha \neq 0$ sia positivo o negativo. La soluzione per $\alpha > 0$ è scartata perché viola il principio di causalità (l'arrivo di un segnale precede la sua partenza).
- La soluzione per $\alpha < 0$ conduce invece a trasformazioni di coordinate simil–Lorentz in cui la velocità limite κ rimane indeterminata.
- Le trasformazioni di coordinate simil–Lorentz sono ottenute, sotto le condizioni sopra specificate, semplicemente *supponendo che la variabile tempo t dipenda anche dalle coordinate spaziali*, come indicato dalla quarta equazione delle (II.1). Questo è il punto cruciale. Infatti, se si scrive t = t', la deduzione di Cattaneo conduce alle trasformazioni di Galileo.
- La derivazione di Cattaneo è puramente matematica. Lo spazio è euclideo, e la variabile tempo è omogenea. La deduzione di Einstein si basa invece su una ipotesi fisica forte: l'invarianza della velocità della luce.
- Le trasformazioni simil–Lorentz sono più generali di quelle di Lorentz, perché la velocità limite non è specificata. Se un giorno si dovesse trovare una nuova velocità limite (diversa da *c*), la relatività speciale varrebbe ancora. Si tratterebbe però di modificare gran parte della fisica che conosciamo, a partire dall'elettromagnetismo.
- Il quarto postulato di Einstein (invarianza di *c*) mostra come un'audace ipotesi fisica possa racchiudere un substrato matematico, emerso solo successivamente, che implica l'esistenza di una velocità limite.

È interessante analizzare la deduzione di Cattaneo alla luce delle considerazioni della discussione sul determinismo (sezione I.4). Il sistema di equazioni (II.1) non è deterministico perché conduce a due soluzioni possibili per $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$. La soluzione per $\alpha > 0$ è scartata perché viola il principio di causalità: introducendo il principio di causalità, il sistema di equazioni diventa deterministico.

II.3.2 Esperimenti ideali con lampi di luce

È concettualmente istruttivo ricavare tutte le predizioni della cinematica relativistica (dilatazione del tempo, contrazione delle lunghezze e trasformazioni di Lorentz) sulla base della trattazione teorica di esperimenti ideali con scambio di lampi di luce di durata idealmente nulla tra due orologi in moto relativo rettilineo uniforme: essi potrebbero, in linea di principio, essere realizzati. Un approccio simile, ma non identico, è stato parzialmente usato da Einstein nel lavoro del 1905, dove i lampi di luce sono sostituiti da 'raggi di luce'. Questo approccio è stato illustrato da Hermann Bondi nel libro *Relativity and common sense* [30]; una trattazione sistematica si può trovare in [29, 31]. È mia convinzione che la scarsa diffusione di questo formalismo costituisca una lacuna per due ragioni: la sua natura operativa, basata sull'uso di orologi e lampi di luce; la semplicità della matematica usata, considerato che l'unica equazione utilizzata è $s = V\Delta t$. Questo approccio alla cinematica relativistica, che è basato sugli stessi postulati di Einstein, costituisce, di fatto, una rielaborazione della parte cinematica del lavoro di Einstein.

Nelle appendici A.1, A.3 e A.4 sono sviluppati tutti i calcoli. Qui richiamiamo solo tre risultati:

- a) il fattore relativistico $\Gamma = 1/\sqrt{1 V^2/c^2}$ è un fattore di "dilatazione del tempo";
- b) la "contrazione delle lunghezze" è una conseguenza della "dilatazione del tempo";
- c) lo scambio di segnali luminosi di durata idealmente nulla tra due orologi in moto relativo rettilineo uniforme conduce agli stessi risultati che si possono ottenere con tre orologi: due in quiete l'uno rispetto all'altro, sincronizzati mediante scambio di segnali luminosi, e posti ad una distanza definita; il terzo in moto relativo rettilineo uniforme rispetto ai primi due. Quest'ultima configurazione è quella comunemente adottata.

Il punto c) merita di essere illustrato ulteriormente. O ed O' sono due orologi ideali in moto relativo rettilineo uniforme lungo la direzione dell'asse $x \equiv x'$. Non è necessario sincronizzare i due orologi. O' informa O, mediante lampi di luce di durata idealmente nulla, della durata di un fenomeno che si sta svolgendo in O': O' lancia verso O un lampo simultaneamente all'evento iniziale del fenomeno ed un secondo lampo simultaneamente all'evento finale del fenomeno. Se $\Delta t'$ è la durata del fenomeno che si svolge in O' misurata da O', allora la durata dello stesso fenomeno, misurata da O sulla base delle informazioni ricevute da O', sarà $\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1 - V^2/c^2}$. La durata di un fenomeno che si svolge nel punto dello spazio in cui è collocato l'orologio è detta 'durata propria'. Nell'esempio appena discusso, la durata propria è quella misurata da O'. Si osservi che, per O, il fenomeno si svolge lungo un segmento di retta. Ciò implica che i due orologi non si trovano in una situazione fisica identica: mentre O' vede il fenomeno svolgersi in un punto dello spazio, O lo vede svilupparsi lungo un segmento di retta. C'è quindi una asimmetria tra i due orologi. Se scambiamo i ruoli tra i due orologi, si perviene allo stesso risultato: la durata di un fenomeno che si svolge in O appare dilatata a O', che vede il fenomeno svolgersi lungo un segmento di retta.

Si perviene alle stesse conclusioni anche con la tradizionale configurazione dei tre orologi. In questo caso, tuttavia, i due orologi in quiete e posti ad una distanza definita debbono essere sincronizzati. Nella configurazione dei tre orologi, il ruolo svolto dalla velocità limite non è così trasparente perché operante nel procedimento di sincronizzazione. È comunque essenziale ricordare che, per il principio di relatività, la durata di ogni fenomeno che si svolge nel punto in cui è posto l'orologio è lo stesso in ogni SRI. La cosiddetta "dilatazione del tempo" significa che la durata di un fenomeno che si svolge nel punto di un SRI in cui è collocato l'orologio (durata propria), misurata in un altro SRI, appare "dilatata" (ingrandita) di un fattore $1/\sqrt{1-V^2/c^2}$: in quest'ultimo sistema di riferimento il fenomeno si svolge lungo un segmento di retta.

La sincronizzazione di due orologi posti ad una distanza fissa può essere effettuata in due modi distinti.

 Collochiamo i due orologi in A e operiamo sulle loro manopole di regolazione in modo tale che essi mostrino simultaneamente lo stesso numero; trasportiamo ora uno dei due orologi in B. Questo procedimento di sincronizzazione si basa sul presupposto che il funzionamento degli orologi non sia influenzato dalla loro accelerazione. ◇ Dopo aver collocato un orologio in A e l'altro in B, viene inviato un segnale luminoso - un lampo di durata idealmente nulla - da A verso B: all'orologio in B è rigidamente fissato uno specchio che riflette il segnale luminoso verso A. Sia t₁ il numero mostrato dall'orologio in A quando il lampo di luce parte da A e t₂ il numero mostrato dall'orologio in A quando il lampo di luce ritorna in A. L'orologio in B, per sincronizzarsi con l'orologio in A, deve, per esempio, regolarsi sul numero 0 in coincidenza con l'arrivo del segnale in B; l'orologio in A si dovrà allora regolare sul numero (0 + (t₂ - t₁)/2) quando il lampo ritorna in A. Implicitamente si è assunto che la velocità della luce sia la stessa in entrambe le direzioni, cioè che lo spazio sia isotropo.

II.3.3 L'effetto viaggio

Il cosiddetto 'paradosso degli orologi' è ben noto. Sono possibili diverse formulazioni del paradosso: ognuna di esse presenta caratteristiche specifiche che debbono essere analizzate caso per caso. Qui, lo formuliamo nel modo seguente. Due orologi *ideali* O_1 ed O_2 sono inizialmente in quiete nell'origine O di un SRI (quello del laboratorio). Ad un certo istante, O2 accelera lungo la direzione positiva dell'asse x e raggiunge la velocita V rispetto ad O_1 ; dopo aver viaggiato per un certo intervallo di tempo alla velocità V, decelera, si ferma nel punto *B* dell'asse *x* e ritorna verso O_1 con le medesime modalità e fasi del viaggio di andata (accelerazione, moto uniforme, decelerazione) ricongiungendosi alla fine con O_1 . Una variante concettualmente non essenziale, ma utile al fine di semplificare l'analisi, consiste nel considerare le fasi di accelerazione e decelerazione come istantanee: rammentiamo che gli orologi coinvolti sono orologi ideali il cui periodo fondamentale non dipende, in particolare, dall'accelerazione cui sono sottoposti. Nel seguito, ci riferiremo a questa variante. Si suppone inoltre che, all'istante iniziale, i due orologi O_1 ed O_2 siano sincronizzati. O_1 prevede che, quando O_2 ritorna, esso mostrerà un numero inferiore a quello mostrato da O_1 . Tuttavia, siccome il moto è relativo, O₂ prevede che al ricongiungimento sia l'orologio O_1 a mostrare un numero inferiore. Da qui il paradosso.

Il paradosso è dovuto alla seguente argomentazione fallace: *siccome* il moto è relativo [premessa], *allora* O_2 prevede che al ricongiungimento sia l'orologio O_1 a mostrare un numero inferiore [conclusione]. Dalla premessa, non segue la conclusione perché i due orologi non sono equivalenti. Infatti, mentre O_1 assiste solo a due eventi – O_1 incontra O_2 per la prima volta e O_1 incontra O_2 per la seconda volta – O_2 assiste a tre eventi: O_2 incontra O_1 per la prima volta; O_2 incontra B e, infine, O_2 incontra O_1 per la seconda

volta. Quindi, c'è una asimmetria tra $O_1 e O_2$ dovuta al fatto che la serie di eventi osservati da $O_1 e O_2$ è diversa: se un viaggiatore vola da Roma a Parigi e ritorna, egli vede Roma, poi Parigi e di nuovo Roma: l'amico del viaggiatore che rimane a Roma, vede solo Roma. Il paradosso nasce perché si considerano gli orologi O_1 ed O_2 come perfettamente equivalenti: che questa sia l'origine del paradosso è confermato dal fatto che tutti i tentativi di soluzione si basano sulla individuazione di una asimmetria tra i due orologi coinvolti.

Prevalentemente, il paradosso è risolto nel modo seguente. I due orologi non sono equivalenti; infatti, uno solo di essi - nel nostro caso O_2 - subisce delle accelerazioni: quindi, l'orologio che al ricongiungimento mostra il numero inferiore è O_2 . Si aggiunge inoltre che, sebbene l'accelerazione permetta di distinguere tra i due orologi, l'effetto di dilatazione del tempo è dovuto solo alla velocità relativa nei tratti percorsi con moto uniforme.

È tuttavia possibile presentare il paradosso senza coinvolgere accelerazioni. Si tratta di considerare, oltre ad O_1 ed O_2 , un terzo orologio O_3 . In questa configurazione, O_1 è in quiete nell'origine del sistema di riferimento del laboratorio (x = 0). L'orologio O_2 , proviene dai valori negativi di x con velocità uniforme V e, quando incontra O_1 , i due orologi vengono sincronizzati. Nel punto di inversione B, il dato temporale mostrato da O_2 viene raccolto dall'orologio O_3 in moto lungo la direzione negativa dell'asse xcon velocità V. Infine, quando O_3 incontra O_1 i loro dati temporali sono confrontati.

Consideriamo ora tre orologi nel SRI del laboratorio. Gli orologi O, O_1 ed O_2 sono in quiete nell'origine della coordinata x. Ad un certo istante, assunto uguale a zero per i tre orologi, gli orologi O_1 ed O_2 iniziano un moto, identico a quello dell'orologio del paradosso usuale, il primo lungo la direzione positiva dell'asse x, il secondo lungo la direzione negativa: come nel caso del paradosso usuale, supponiamo che le accelerazioni siano istantanee. L'inversione del moto di O_1 avviene quando O_1 raggiunge il punto B_1 distante l_0 da O; l'inversione del moto di O_2 avviene quando O_2 raggiunge il punto B_2 distante $-l_0$ da O. Questa configurazione è discussa in [32, p. 1124] ed è denominata 'paradosso del terzetto'. Vediamo come i fenomeni considerati sono descritti nel sistema di riferimento del laboratorio. La durata del viaggio di andata e ritorno di O_2 è uguale a $2l_0/V$; la durata del viaggio di andata e ritorno di O_2 è uguale a $2l_0/V$. Quindi, quando i due orologi si ricongiungono, essi sono ancora sincronizzati. Poniamoci ora dal punto di vista di O_1 . Per O_1 la durata del suo viaggio è $(2l_0/V)\sqrt{1-V^2/c^2}$;

analogamente, per O_2 la durata del suo viaggio è $(2l_0/V)\sqrt{1-V^2/c^2}$. Quindi, quando O_1 ed O_2 si incontrano di nuovo, i loro due orologi mostrano lo stesso numero e sono pertanto ancora sincronizzati. Non è possibile enunciare alcun paradosso perche vi è perfetta simmetria tra i due orologi O_1 ed O_2 . I due orologi, quando ritornano in O sono ancora sincronizzati, non ostante il fatto che, durante il loro viaggio, la loro velocità relativa sia $\pm 2V/(1+V^2/c^2)$. Tuttavia, la durata propria dei due viaggi, misurata da O_1 e O_2 è minore, rispetto a quella misurata dal laboratorio (O) di un fattore $\sqrt{1-V^2/c^2}$.

È possibile introdurre una interessante variante asimmetrica nel paradosso del terzetto. Ora la distanza tra $O \in B_1$ e la distanza tra $O \in B_2$ (misurate nel SRI di O) sono connesse alle velocita di $O_1 \in O_2$ dalla relazione $l_{01}/l_{02} = V_1/V_2$ in modo tale che la durata Δt del viaggio di andata e ritorno di $O_1 \in O_2$ sia la stessa nel sistema di riferimento di O. Invece, per $O_1 \in O_2$ la durata propria del proprio viaggio sarà diversa: $\Delta t \sqrt{1 - V_1^2/c^2}$ per $O_1 \in \Delta t \sqrt{1 - V_2^2/c^2}$ per O_2 . Al loro incontro i due orologi non saranno più sincronizzati, perche non vi è simmetria tra di essi. Questa versione asimmetrica del terzetto può essere considerata come la versione lineare dell'esperimento di Hafele e Keating in assenza di gravità (sezione II.3.5.1).

In conclusione: il paradosso degli orologi nasce perché si presuppone che i due orologi considerati siano perfettamente simmetrici. Come abbiamo visto, questa supposta simmetria, in generale, non sussiste. Sarebbe quindi ragionevole non parlare più di 'paradosso degli orologi' ma di 'effetto viaggio'.

L'effetto viaggio è una conseguenza della dilatazione del tempo. Tuttavia, esso ha una proprietà che lo contraddistingue: mentre la dilatazione del tempo dipende solo dalla velocità relativa dei due orologi, l'effetto viaggio può anche essere indipendente da essa. È pertanto opportuno riconsiderare i tre casi che abbiamo discusso alla luce di questa affermazione.

- Nel caso 'classico' (un solo orologio si muove rispetto al sistema di riferimento del laboratorio) l'effetto dipende dalla velocità relativa *V* tra i due orologi attraverso il fattore $\sqrt{1 V^2/c^2}$.
- Nel caso del terzetto simmetrico l'effetto viaggio è nullo, mentre la velocità relativa tra i due orologi è $\pm 2V/(1 + V^2/c^2)$ dove il segno (+) vale mentre i due orologi si allontanano e il segno (-) mentre i due orologi si avvicinano. Se durante il viaggio di andata o quello di ritorno l'orologio O_1 informa l'orologio O_2 , mediante lampi di luce, della durata di un fenomeno che si svolge dove si trova O_1 , la relazione tra le durate

misurate da O_1 e da O_2 è quella prevista dalla dilatazione del tempo. Ciò dimostra che dilatazione del tempo ed effetto viaggio, sebbene connessi, sono in questo caso due fenomeni distinti.

• Nel caso del terzetto asimmetrico il rapporto tra le durate proprie dei viaggi dei due orologi è dato da

$$\frac{\Delta \tau_1}{\Delta \tau_2} = \sqrt{\frac{1 - V_1^2 / c^2}{1 - V_2^2 / c^2}} = \frac{c + V_1}{c - V_2} \sqrt{\frac{c - w}{c + w}}$$
(II.6)

dove w è la velocità relativa tra i due orologi nel caso in cui i due orologi si stanno allontanando. Quindi, in questo caso l'effetto viaggio non dipende solo dalla velocità relativa tra i due orologi.

Per ricavare l'ultimo passaggio della (II.6), si ricordi che w può essere scritta sotto la forma:

$$\frac{c-w}{c+w} = \frac{c-V_1}{c+V_1} \frac{c-V_2}{c+V_2}$$
(II.7)

II.3.4 Il formalismo spazio - temporale

Oggetto della nostra osservazione sono sempre, e soltanto, spazio e tempo insieme considerati. Non ha mai alcuno osservato un luogo se non ad un certo tempo, né un tempo se non in un luogo determinato [33, p. 335].

Hermann Minkowski

Rispetto alla trattazione basata sui postulati di Einstein ed esemplificata con gli esperimenti ideali con lampi di luce, lo spazio - tempo offre il vantaggio di fornire un apparato formale il cui uso non richiede alcuna considerazione fisica quando si debba procedere allo sviluppo di calcoli. Naturalmente, il formalismo deve essere interpretato specificando quali siano le grandezze fisiche da sottoporre a misura. Riassumiamo qui le relazioni che ci interessano specificando, nel contempo, l'interpretazione del formalismo. Il quadrato dell'intervallo che separa due punti dello spazio - tempo infinitamente vicini è dato:

$$ds^{2} = c^{2}dt^{2} - dx^{2} - dy^{2} - dz^{2} = c^{2}dt^{2} - dl^{2}$$
(II.8)

Consideriamo ora un orologio in moto inerziale: l'intervallo di tempo proprio misurato da questo orologio quando il suo punto rappresentativo percorre un intervallo infinitesimo ds dello spazio - tempo è dato da $d\tau$ ove:

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$$
(II.9)

dove dt è l'intervallo di tempo misurato da una coppia di orologi posti in quiete nei punti estremi dell'intervallo spaziale infinitesimo e tra loro sincronizzati. Ne segue che:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt, \qquad u = \frac{dl}{dt}$$
(II.10)

Ritroviamo così la formula della dilatazione del tempo ottenuta precedentemente. Si noti che, nella descrizione spazio - temporale, è automaticamente introdotta la configurazione dei tre orologi: un orologio che misura l'intervallo di tempo proprio e che è in moto nel sistema inerziale scelto, e i due orologi posti in quiete nei punti estremi dell'intervallo spaziale infinitesimo.

II.3.5 Dilatazione del tempo ed effetto viaggio: gli esperimenti

È necessario distinguere tra dilatazione del tempo ed effetto viaggio (paradosso degli orologi risolto). Sebbene il primo implichi il secondo, sono due fenomeni distinti. È quindi opportuno raggruppare gli esperimenti in due classi: in una collochiamo gli esperimenti riguardanti l'effetto viaggio; nella seconda, gli esperimenti concernenti la dilatazione del tempo. Come vedremo, gli esperimenti riguardanti la dilatazione del tempo hanno raggiunto una accuratezza maggiore di quella degli esperimenti sull'effetto viaggio effettuati con orologi macroscopici.

II.3.5.1 Effetto viaggio

Esperimento di Hafele e Keating ed esperimento di Alley Gli esperimenti sull'effetto viaggio condotti con orologi macroscopici sono stati due: l'esperimento di Hafele e Keating (1972) eseguito con orologi atomici al cesio in volo su aerei commerciali intorno alla Terra e l'esperimento di Alley (1979) con orologi atomici in volo lungo un circuito chiuso locale. Per ridurre gli errori dovuti a variazioni casuali del ritmo degli orologi, sono stati utilizzati quattro orologi al cesio nell'esperimento di Hafele e Keating e tre orologi al rubidio nell'esperimento di Alley. Hafele e Keating hanno presentato la descrizione teorica del loro esperimento in [34, 35]. Un orologio rimane fermo sulla superficie terrestre in un punto dell'equatore. Un altro orologio è sincronizzato con il primo prima dell'esperimento; dopo aver raggiunto una determinata quota, percorre una circonferenza equatoriale verso Est e ritorna al punto di partenza. Un secondo esperimento prevede invece che l'orologio sull'aereo circumnavighi la Terra verso Ovest. Nella descrizione teorica sono trascurati i tratti di ascesa e di discesa. Gli esperimenti sono descritti in un sistema di riferimento non rotante con l'origine nel centro della Terra, che è in caduta libera: quindi il sistema di riferimento scelto è un sistema inerziale. In questo sistema di riferimento entrambi gli orologi, quello posto in un punto dell'equatore e quello in volo sull'aereo, sono in moto e immersi nel campo gravitazionale terrestre supposto generato da una massa sferica.

Hafele e Keating usano il formalismo della relatività generale. Se si considera un orologio in moto con velocità *u* tra due punti infinitamente vicini, la durata propria del viaggio $d\tau$ e quella dt misurata da due orologi sincronizzati in quiete nei due punti considerati sono legate dall'equazione (per campi gravitazionali deboli e velocità piccole rispetto a quella della luce):

$$d\tau \approx \left(1 + \frac{\chi^2}{c^2} - \frac{u^2}{2c^2}\right) dt \tag{II.11}$$

dove χ è il potenziale gravitazionale (newtoniano). È evidente che nella (II.11) operano due effetti: uno attribuibile alla dilatazione del tempo della relatività speciale (dipendente da u^2/c^2) e l'altro, dovuto al potenziale gravitazionale (dipendente da χ^2/c^2). La comparsa del potenziale gravitazionale nella (II.11) è spiegata nella sezione dedicata alla relatività generale (II.4). Qui ci occupiamo della dilatazione del tempo della relatività speciale: in questo caso $\chi = 0$ e la (II.11) si riduce alla (II.10), approssimata per $u \ll c$. Per semplificare ulteriormente la trattazione, supporremo che l'aereo voli radente al suolo; supporremo inoltre che le accelerazioni e decelerazioni dell'aereo siano istantanee (figura II.1).

Diversamente da Hafele e Keating, non useremo il formalismo spazio - temporale perchè è interessante vedere come gli stessi risultati possano essere ottenuti mediante argomentazioni più fisiche basate sul fenomeno della dilatazione del tempo. Supponiamo che l'aereo parta all'istante t = 0 dal punto $P = P_0$ dell'equatore (figura II.1). Nel sistema di riferimento scelto, la distanza percorsa dal punto P dell'equatore all'istante t, sarà:

$$l_P = \Omega R t \tag{II.12}$$



Figura II.1. Circonferenza equatoriale vista dal polo Nord. L'aereo *A* è in volo verso Est con velocità *u* rispetto al suolo e radente ad esso; il punto *P* dell'equatore è quello da cui l'aereo è partito e il punto *P*₀ indica la posizione di *P* e *A* all'istante *t* = 0 (inizio del volo). Nel sistema di riferimento non rotante con l'origine nel centro della Terra, il punto *P* si muove verso Est con velocita ΩR e l'aereo con velocita $\Omega R + u$ (composizione galileiana delle velocità perché entrambe molto minori di *c*). L'aereo sta inseguendo il punto *P* posto sull'equatore e lo raggiungerà dopo aver percorso una intera circonferenza in più del punto *P*. Nel caso di volo dell'aereo verso Ovest le posizioni tra *A* e P sono invertite: è il punto P dell'equatore ad inseguire l'aereo ($u < \Omega R$).

dove Ω è la velocità angolare di rotazione della Terra e *R* il suo raggio equatoriale. La distanza percorsa dall'aereo sarà invece:

$$l_A = (\Omega R \pm u)t \tag{II.13}$$

dove u è la velocità dell'aereo rispetto al suolo. Abbiamo usato la composizione galileiana delle velocità, perché entrambe le velocità coinvolte sono molto minori di c; inoltre, il segno + vale nel caso di volo verso Est, il segno – nel caso di volo verso Ovest. Ricavando t dalle due equazioni precedenti ed uguagliando i secondi membri delle due equazioni così ottenute, si ottiene:

$$l_A = l_P \left(1 \pm \frac{u}{\Omega R} \right) \tag{II.14}$$

Nel caso di volo in direzione Est, l'aereo raggiungerà di nuovo il punto di partenza sull'equatore dopo aver percorso una intera circonferenza in più del punto P da cui era partito. Ciò avverrà all'istante:

$$t = \frac{2\pi R}{u} \tag{II.15}$$

In corrispondenza di questo istante il punto P avrà percorso la distanza:

$$l_P = \Omega R \frac{2\pi R}{u} \tag{II.16}$$

43

Se assumiamo che la velocità dell'aereo rispetto al suolo sia di 300 ms⁻¹, l'aereo impiegherà circa 37.1 ore a circumnavigare la Terra e, nel frattempo, la Terra avrà effettuato circa 1.5 rotazioni. Si tenga presente che $\Omega R = 463.82 \, \text{ms}^{-1}$.

Siccome l'orologio posto nel punto P dell'equatore è in moto con velocità *u* nel sistema inerziale scelto, esso misurerà una durata propria del proprio viaggio data da (usiamo le notazioni di Hafele):

$$\Delta \tau_0 = \frac{l_P}{\Omega R} \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 R^2}{c^2}} \approx \Delta t \left(1 - \frac{\Omega^2 R^2}{2c^2}\right) \tag{II.17}$$

dove Δt è la durata del viaggio del punto P nel sistema di riferimento scelto. La (II.17) si ottiene partendo dalla forma differenziale ed usando sistemi inerziali istantaneamente comoventi con il punto *P* ed integrando. Questo procedimento si applica anche per ricavare l'equazione sottostante. L'orologio posto sull'aereo è in moto con velocità $\Omega R + u$; esso misurerà una durata propria del proprio viaggio data da (il suffisso E sta per Est):

$$\Delta \tau_E = \frac{l_P + 2\pi R}{\Omega R + u} \sqrt{1 - \frac{(\Omega r + u)^2}{c^2}} \approx \Delta t \left[1 - \frac{1}{2c^2} (\Omega^2 R^2 + u^2 + 2\Omega R u) \right]$$
(II.18)

dove $(l_P + 2\pi R)/(\Omega R + u)$ è la durata del viaggio dell'aereo nel sistema di riferimento scelto, uguale a quella del viaggio del punto *P* dell'equatore nello stesso sistema di riferimento. Quindi:

$$\Delta \tau_E - \Delta \tau_0 = -\Delta t \frac{u^2 + 2\Omega R u}{2c^2} \tag{II.19}$$

Infine:

$$\frac{\Delta \tau_E - \Delta \tau_0}{\Delta \tau_0} \approx -\frac{u}{2c^2} (2\Omega R + u)$$
(II.20)

Nel calcolare questo rapporto si è trascurato il termine $\Omega^2 R^2$ nella somma $2c^2 - \Omega^2 R^2$. La (II.20) coincide con l'equazione (8) dell'articolo di Hafele [34] in assenza di campo gravitazionale e per h = 0. La (II.20) afferma che quando i due orologi si incontrano di nuovo, essi non sono più sincronizzati: l'orologio dell'aereo è in ritardo della quantità mostrata dalla (II.20); si osservi che l'orologio dell'aereo sarà in ritardo qualunque sia il valore di u.

Nel rifare i calcoli nel caso di volo verso Ovest si tenga presente che, in questo caso, è il punto P ad inseguire l'aereo. Il risultato finale sarà (il suffisso W sta per Ovest):

$$\frac{\Delta \tau_W - \Delta \tau_0}{\Delta \tau_0} \approx \frac{u}{2c^2} (2\Omega r - u) \tag{II.21}$$

Nel caso di volo verso Ovest, l'orologio dell'aereo sarà sempre in anticipo sinché $u < 2\Omega R$.

Nella descrizione dell'esperimento nel sistema di riferimento non rotante con l'origine nel centro della Terra, il volo dell'aereo è un fenomeno che si svolge lungo archi di circonferenza, mentre per l'orologio in volo il fenomeno si svolge nel punto in cui l'orologio si trova. Questa considerazione, congiuntamente a come si è pervenuti alle equazioni (II.20) e (II.21), mostra che l'effetto viaggio è una conseguenza della dilatazione del tempo.

Il caso del terzetto asimmetrico discusso in precedenza può essere considerato la versione lineare dell'esperimento di Hafele e Keating in assenza di gravità. Per esempio, nel caso del volo radente verso Est, il rapporto tra le durate proprie misurate dai due orologi è dato da (equazioni (II.17) e (II.18)):

$$\frac{\Delta \tau_0}{\Delta \tau_E} = \sqrt{\frac{1 - \nu_0^2 / c^2}{1 - \nu_E^2 / c^2}}$$
(II.22)

che è identica alla (II.6). Analoga considerazione vale nel caso di volo radente verso Ovest.

Per estendere il caso da noi discusso - volo dell'aereo radente al suolo e in assenza di gravità – al caso generale è sufficiente ricordare che il periodo fondamentale di un orologio atomico, come mostrato dall'equazione (II.41) della sezione II.4, è legato a quello in assenza di gravità dalla relazione $T_{grav} \approx T_0 (1 - \chi^2 / c^2)$ dove χ è il potenziale gravitazionale newtoniano e che l'aereo vola ad una quota h. Così operando, si ottiene la formula (9) del lavoro di Hafele [34] (è necessario trascurare i termini del tipo $(V^2/c^2)(\gamma^2/c^2)$). La trattazione di Hafele e Keating usa il formalismo spazio - temporale della relatività generale. Abbiamo mostrato che, per quanto riguarda il contributo della relatività speciale, il formalismo spazio - temporale non è necessario. Inoltre, trattandosi di campi gravitazionali deboli per i quali vale l'approssimazione newtoniana, è possibile trattare l'effetto della gravità sugli orologi usando la formula $E_0 = mc^2$ della relatività speciale (appendice B.5). Ciò implica che, a rigore, l'esperimento di Hafele e Keating non può essere considerato una corroborazione delle predizioni della relatività generale visto che alle medesime predizioni si perviene usando solo la relatività speciale. Questa considerazione, tuttavia, non deve offuscare il fatto che le predizioni delle due teorie circa la dipendenza del periodo fondamentale di un orologio atomico dalla gravità sono diverse e che esse diventano praticamente indistinguibili solo per campi gravitazionali sufficientemente piccoli e velocità piccole rispetto a quelle della luce.

L'analisi dei dati sperimentali raccolti è piuttosto complessa [36]. Innanzitutto, si deve tener conto del fatto che gli aerei usati non percorrono rotte equatoriali; quindi la formula (9) del lavoro di Hafele [34] deve essere modificata per tener conto della latitudine, nonché della componente della velocità dell'aereo in direzione Est. Inoltre, l'analisi è complicata dal fatto che l'aereo non mantiene costanti altitudine, latitudine e velocità rispetto al suolo. Tuttavia la conclusione di Hafele e Keating è che gli effetti previsti dalla loro equazione (9), opportunamente modificata come indicato. sono stati verificati al di là di ogni ragionevole dubbio: si veda la tabella 1 in [36]. Gli autori commentano così: «Questi risultati forniscono una soluzione empirica non ambigua del famoso "paradosso" degli orologi con orologi macroscopici» [36, p. 168]. Alley che, qualche anno dopo – con un gruppo di ricercatori dell'Università del Maryland – ha eseguito un esperimento simile, così commenta: «Il confronto con le predizioni sembrano mostrare un'incertezza di circa il 13% per la direzione Ovest, ma [un'incertezza] di gran lunga peggiore per la direzione Est. È difficile attribuire un'incertezza all'interno del confronto tra gli effetti dovuti alla velocità e al potenziale [gravitazionale]: ma la loro esistenza è certamente dimostrata [37, p. 17].» L'esperimento di Alley, sebbene caratterizzato da una accuratezza superiore a quello di Hafele e Keating (gli autori la stimano intorno all'uno per cento [37, p. 22]), non ha avuto la stessa risonanza. D'altra parte, nell'esperimento di Alley, il termine che nell'esperimento di Hafele e Keating dà origine alla asimmetria Est - Ovest e pone in evidenza la irrilevanza della velocità relativa tra i due orologi, è trascurabile [37, p. 18]: quindi, l'esperimento di Hafele e Keating è più completo. Le caratteristiche dell'esperimento di Alley sono state: a) l'aereo usato era 'dedicato', cioè appositamente approntato per l'esecuzione dell'esperimento, ed era dotato di motori a turboelica (quindi con velocità di crociera inferiore a quella dell'esperimento di Hafele e Keating); b) la rotta dell'aereo era un circuito chiuso locale; c) il tempo mostrato dall'orologio in volo era costantemente confrontato con quello mostrato dall'orologio a terra mediante scambio di impulsi laser; d) l'orologio in volo era confrontato con quello a terra prima e dopo il volo; e) il formalismo teorico usato è lo stesso di quello di Hafele e Keating.

Le equazioni (II.20, II.21) relative all'esperimento di Hafele e Keating mostrano che il rapporto fra le durate dell'effetto viaggio non dipende solo dalla velocità relativa tra i due orologi, ma è anche una funzione delle loro velocità rispetto al sistema inerziale avente l'origine nel centro della Terra. Questa proprietà differenzia l'effetto viaggio dalla dilatazione del tempo in cui il rapporto tra le due durate dipende solo dalla velocità relativa tra i due orologi.

II.3.5.2 Dilatazione del tempo

Le verifiche indirette della dilatazione del tempo della relatività speciale cui accenneremo tra poco nonché le verifiche dirette del cosiddetto red - shift gravitazionale hanno raggiunto accuratezze nettamente superiori di quelle dell'esperimento di Hafele e Keating o di Alley. A questa classe di verifiche indirette della dilatazione del tempo appartengono gli esperimenti eseguiti sfruttando l'effetto Doppler oppure il decadimento di particelle instabili in volo.

Effetto Doppler L'effetto Doppler per le onde elettromagnetiche nel vuoto è descritto dall'equazione:

$$v = v' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c)\cos\theta}$$
(II.23)

dove, come usuale, le grandezze accentate si riferiscono al sistema di riferimento O' considerato in moto con velocità v, rispetto al sistema di riferimento O, lungo la direzione positiva dell'asse comune $x \equiv x'$. θ è l'angolo formato con l'asse x dal vettore d'onda.

A partire dalla fine degli anni Trenta del Novecento, sono stati eseguiti esperimenti sempre più raffinati riguardanti l'effetto Doppler per fotoni emessi o assorbiti da atomi o nuclei in volo. Gli esperimenti erano di due tipi: con atomi o nuclei in volo rettilineo uniforme, con ioni in moto circolare uniforme, o con nuclei in solidi cristallini su dispositivi rotanti, usando in quest'ultimo caso, fotoni emessi senza rinculo (effetto Mössbauer). Come descritto in [38, 39] e nell'appendice B di [40], questi esperimenti sono stati interpretati usando la teoria ondulatoria della luce ed ignorando completamente il fatto che – come mostrato da Schrödinger nel 1922 [41] – l'emissione e l'assorbimento di un fotone da parte di un atomo o di un nucleo è un processo quantico governato dalle leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Lo scopo di questi esperimenti è quello di verificare la dilatazione del tempo della relatività speciale (ed anche, in alcuni casi, il red - shift previsto dalla relatività generale). Gli esperimenti sull'effetto Doppler, nelle loro versioni più recenti, hanno verificato - in modo indiretto – la dilatazione del tempo con una accuratezza dell'ordine di 10^{-7} [42]. Ciò significa che il valore teorico del parametro preso in considerazione dovrebbe essere zero e che, invece, le misure di questo parametro differiscono dallo zero per un ammontare pari a $\pm 10^{-7}$.

Come mostrato in [38, 39], tutti questi esperimenti possono essere descritti in termini di fotoni emessi o assorbiti da atomi o nuclei: la conservazione dell'energia e della quantità di moto nei processi di emissione o di assorbimento è responsabile della dipendenza dell'energia del fotone emesso o assorbito dalla velocità (rispetto al laboratorio) dell'atomo (o nucleo) emettente o assorbente. La relazione $E_{ph} = hv$ permette poi di scrivere le formule ricavate in termini di frequenza di onde elettromagnetiche: nelle sezioni IV.7.2 e IV.7.3 saranno ripresi e sviluppati questi argomenti.

È interessante analizzare questi esperimenti considerando un ipotetico orologio costituito da un insieme di atomi e uno spettrometro S': i primi forniscono la frequenza campione, il secondo misura e mostra la frequenza della radiazione emessa dagli atomi. Supponiamo, per semplicità di argomentazione, che gli atomi siano in quiete. Secondo la trattazione alla Schrödinger (sezione IV.7.2), l'energia dei fotoni emessi dagli atomi è data da:

$$E_{ph}^{0} = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2mc^2} \right) \tag{II.24}$$

nella approssimazione in cui $\Delta E \ll mc^2$ (ΔE è la differenza in energia tra i due livelli della transizione e *m* è la massa dell'atomo non eccitato). L'energia E_{ph}^0 è un invariante relativistico, cioè ha lo stesso valore in ogni SRI. La frequenza campione fornita dagli atomi sarà semplicemente data da $v_0 = E_{ph}^0/h$, dove *h* è la costante di Planck: a questa frequenza corrisponde il periodo $T_0 = 1/v_0$ *che è lo stesso in ogni sistema SRI*. Consideriamo ora uno spettrometro *S* che vede lo spettrometro *S'* e i suoi atomi in moto inerziale tale che la direzione lungo la quale sono emessi i fotoni formi un angolo θ con il vettore velocità degli atomi prima dell'emissione. Naturalmente, tutte queste grandezze sono considerate nel sistema di riferimento di *S*. Allora, la frequenza misurata dallo spettrometro *S* è data da:

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c)\cos\theta}$$
(II.25)

In termini di periodi, questa equazione, per $\theta = \pi/2$, assume la forma:

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \nu^2 / c^2}}$$
(II.26)

che è la formula della dilatazione del tempo. Tutti gli esperimenti svolti corroborano le equazioni (II.25) e (II.26). Ciò significa, in particolare, che il periodo fondamentale dell'orologio T_0 è lo stesso in ogni SRI, come peraltro richiesto dal principio di relatività.

Particelle instabili. Rimangono da analizzare gli esperimenti sulla dilatazione del tempo effettuati con particelle instabili. Il primo esperimento di questo tipo fu eseguito da Bruno Rossi e David Hall usando muoni negativi (allora chiamati mesotroni) contenuti nei raggi cosmici [43]. A partire dagli anni Cinquanta del secolo scorso, comparvero diversi lavori riguardanti il decadimento di particelle instabili in moto rettilineo uniforme prodotte in acceleratori. Una rassegna dei dati ottenuti si può trovare nel lavoro di Bailev et al. [44]. In questi esperimenti, come in quello di Rossi e Hall, la vita media delle particelle in moto è misurata indirettamente attraverso la misura della loro velocità e della distanza media da loro percorsa: la differenza, essenziale ai fini della precisione della misura, consiste nel passaggio da misure in atmosfera a quelle in vuoto. Il lavoro di Bailey et al. è interessante anche perché studia il decadimento di muoni negativi o positivi in moto circolare uniforme: il risultato è identico a quello che si sarebbe ottenuto se i muoni fossero stati in moto rettilineo uniforme. Pertanto, gli autori concludono che l'accelerazione cui i muoni sono sottoposti ($a_c \approx 10^{18}$ g) non influisce sulla vita media dei muoni.

Il decadimento di particelle instabili è descritto dall'equazione:

$$N = N_0 e^{-t/\tau} \tag{II.27}$$

dove τ è la vita media delle particelle. Vale quindi la relazione:

$$t = \tau \log \frac{N_0}{N} = \tau \log \frac{N_0}{N_0 - n}$$
 (II.28)

dove *n* è il numero delle particelle che sono decadute. Quindi, un insieme di particelle instabili o un materiale radioattivo può essere impiegato come un orologio: il suo standard di frequenza è l'inverso della vita media τ , il contatore è costituito dai rivelatori dei prodotti del decadimento e i numeri visualizzati sono i valori della variabile *t* data dalla (II.28)⁷. Se particelle instabili sono in volo inerziale con velocità *v* rispetto al laboratorio, la distanza *l* percorsa è data da:

$$l = v\tau = v \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
(II.29)

dove τ_0 è la vita media delle particelle in quiete. Siccome questa equazione è sperimentalmente corroborata, ne segue che è corroborata la formula della

⁷Paul Langevin è stato il primo, a mia conoscenza, a proporre l'uso di un orologio radioattivo per sottoporre a verifica sperimentale il 'paradosso dei gemelli' [45].

dilatazione del tempo:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \nu^2 / c^2}}$$
(II.30)

La teoria cinematica di prova di Mansouri e Sexl. A partire dagli anni Ottanta del secolo scorso, si è diffusa la consuetudine di sottoporre a verifica sperimentale alcune predizioni della relatività speciale attraverso l'uso della 'teoria cinematica di prova' di Mansouri e Sexl [46]. Questa teoria si basa sull'assunzione secondo cui la velocità di propagazione della luce è costante e isotropa solo in un ipotetico sistema di riferimento privilegiato ed usa trasformazioni di coordinate generalizzate che tengono conto anche della possibilità di differenti procedure di sincronizzazione degli orologi. La differenza tra le predizioni della relatività speciale e quelle della teoria di Mansouri e Sexl è riconducibile a tre parametri $a, b \in d$ che compaiono nelle trasformazioni di coordinate generalizzate e che dipendono dal quadrato della velocità del SRI rispetto al sistema di riferimento privilegiato. Il parametro *a* controlla la dilatazione del tempo, *b* la contrazione delle lunghezze e d una contrazione delle lunghezze trasversale non prevista dalla relatività speciale: nella relatività speciale, tutti e tre i parametri sono uguali ad uno. Per velocità piccole rispetto a quella della luce, il parametro a può essere sviluppato in serie in funzione della velocità w del sistema di riferimento rispetto al sistema di riferimento privilegiato:

$$a \approx 1 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{w^2}{c^2} + \left(\alpha_2 - \frac{1}{8}\right)\frac{w^4}{c^4} + \cdots$$
 (II.31)

Il parametro della dilatazione del tempo assume, nella teoria di prova di Mansouri e Sexl, la forma:

$$\gamma \approx \frac{1}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} [1 + \alpha (v_i^2 + 2\vec{w} \cdot \vec{v}_i)] + \cdots$$
 (II.32)

dove \vec{w} è la velocità del sistema di riferimento del laboratorio rispetto al sistema di riferimento privilegiato e \vec{v}_i è, per esempio, la velocità della sorgente di luce rispetto al laboratorio. Quando, per esempio in [42], si conclude che la dilatazione del tempo della relatività speciale è stata verificata con una accuratezza dell'ordine di 10⁻⁷, ciò significa che il parametro α è, se diverso da zero, minore di 10⁻⁷: questo risultato esclude anche – con la medesima accuratezza – la possibilità che il sistema di riferimento che vede la

radiazione cosmica come isotropa possa costituire un sistema di riferimento privilegiato (si veda più avanti). La teoria di Mansouri e Sexl può essere usata anche per descrivere esperimenti del tipo Michelson - Morley (in questo caso intervengono i parametri $b \in d$) o esperimenti del tipo Kennedy -Thorndike (con l'intervento dei parametri $a \in b$).

II.4 Il tempo nella relatività generale

La teoria della relatività generale è una teoria della gravitazione caratterizzata dal fatto che l'effetto delle masse è descritto dalla metrica quadridimensionale dello spazio - tempo. La metrica più generale dello spazio - tempo assume la forma:

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k \tag{II.33}$$

dove i coefficienti g_{ik} , che dipendono dalle coordinate x_i , sono le componenti di un tensore doppio simmetrico ($g_{ik} = g_{ki}$). In un punto qualsiasi dello spazio - tempo, è sempre possibile scegliere un sistema di assi coordinati tale che la metrica si riduca alla forma:

$$ds^{2} = g_{00}c^{2}dt^{2} - g_{11}dx_{1}^{2} - g_{22}dx_{2}^{2} - g_{33}dx_{3}^{2}$$
(II.34)

Se due eventi, infinitamente vicini nella dimensione temporale, accadono nello stesso punto *P* dello spazio, il quadrato della distanza tra i punti dello spazio - tempo associati ai due eventi sarà, in un sistema di riferimento con l'origine nel punto *P*:

$$ds^2 = g_{00}c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2 \tag{II.35}$$

perché, nella (II.34), $dx_1 = dz_2 = dx_3 = 0$ e dove, per definizione, $d\tau$ è l'intervallo di tempo proprio. Pertanto:

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} \, dt \tag{II.36}$$

Nella (II.36), $d\tau$ è la durata del fenomeno che si è svolto nel punto *P*, mentre dt sarebbe stata la durata dello stesso fenomeno in assenza di campo gravitazionale ($g_{00} = 1$). La (II.36) implica che il periodo fondamentale di un orologio dipenda dal coefficiente metrico g_{00} secondo la relazione:

$$T_{grav} = \frac{T_0}{\sqrt{g_{00}}} \tag{II.37}$$

dove T_0 è il periodo fondamentale dello stesso orologio in assenza di gravità. Quindi, in relatività generale, non sussiste il concetto di orologio ideale, cioè di un orologio il cui periodo fondamentale non è modificato da alcuna interazione fisica. Non solo: è necessario assumere – a meno di non abbandonarsi alla ricerca, epistemologicamente insoddisfacente, di orologi che soddisfino la (II.37) – che la gravità modifica il periodo fondamentale di ogni classe di orologi secondo quanto previsto dalla (II.37). Questa assunzione presenta, tuttavia, alcuni problemi. È innanzitutto necessario individuare le classi di orologi oggi disponibili e verificare se ciascuna di esse soddisfa la (II.37). In secondo luogo, anche ammesso che tutte le classi di orologi oggi disponibili soddisfino la (II.37), una nuova classe di orologi potrebbe in futuro violarla. Infine, se una classe di orologi soddisfa la (II.37), è necessario capire come la gravità modifica il periodo fondamentale della classe di orologi presa in considerazione.

Possiamo individuare almeno quattro classi di orologi artificiali, sulla base dello standard di frequenza utilizzato: orologi a pendolo, orologi a molla, orologi al quarzo ed orologi che utilizzano la radiazione elettromagnetica come standard di frequenza. A quest'ultima classe, che denomineremo classe EM, appartengono gli orologi atomici, gli orologi ottici (orologi atomici che usano uno standard di frequenza che cade nell'intervallo ottico) quelli basati su maser o cavità risonanti. A queste classi di orologi, andrebbe aggiunta anche quella degli orologi basati su circuiti elettrici risonanti: peraltro, gli oscillatori al quarzo possono essere descritti come circuiti elettrici risonanti. Sebbene, nella pratica corrente, ci si riferisca indifferentemente a orologi o standard di frequenza, è opportuno mantenere la distinzione tra i due termini perché essi denotano oggetti fisici distinti. Gli orologi a pendolo violano l'equazione (II.37). Tuttavia, questa classe di orologi presenta una caratteristica peculiare: funzionano solo in presenza di gravità (in particolare, non funzionano in caduta libera). Per questa ragione, essi non possono essere descritti dall'equazione (II.37): mentre essi possono mostrare il tempo τ , non possono invece mostrare il tempo t perché non funzionano in assenza di gravità. La classe degli orologi a pendolo va quindi tolta dall'elenco. Gli esperimenti condotti sinora hanno dimostrato che soddisfano la (II.37) gli orologi al quarzo e quelli della classe EM. Non sono invece stati condotti esperimenti con la classe degli orologi a molla: la loro accuratezza non è sufficiente per permettere la verifica della (II.37).

Cerchiamo ora di capire come la gravità possa influenzare il periodo fondamentale degli orologi della classe EM incominciando con gli orologi atomici. Secondo la relatività generale, l'energia a riposo di un atomo posto in un campo gravitazionale statico e debole è data da [47, p. 251]:

$$E_{grav} = Mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}} \tag{II.38}$$

dove *M* è la massa dell'atomo e χ è il potenziale gravitazionale newtoniano. Si noti che il potenziale gravitazionale ha le dimensioni di una velocità al quadrato ed è negativo. Se l'atomo è eccitato, questa equazione assume la forma:

$$E_{grav} = (mc^2 + \Delta E_0)\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}$$
 (II.39)

dove *m* è la massa dell'atomo non eccitato e ΔE_0 è la differenza di energia tra lo stato eccitato dell'atomo e lo stato fondamentale in assenza di gravità. La (II.39) implica che la frequenza della transizione elettronica considerata è data da:

$$v_{grav} = v_0 \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}} \tag{II.40}$$

dove v_0 è la frequenza in assenza di gravità; il periodo fondamentale dell'orologio sarà allora dato da:

$$T_{grav} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}} \approx T_0(1 - \frac{\chi}{c^2})$$
 (II.41)

se T_0 è il periodo in assenza di gravità. La (II.41) è una forma approssimata della (II.37): abbiamo così mostrato come la gravità modifica il periodo fondamentale di un orologio atomico, in base a quanto previsto dalla relatività generale ⁸. Si osservi, tuttavia, che si può giungere alle stesse conclusioni usando la formula della relatività speciale $E = Mc^2$ (appendice B.5). Questa trattazione vale, ovviamente, anche per gli orologi ottici ed è immediatamente estensibile a quelli basati sull'uso di maser. Per quanto concerne invece gli orologi basati su cavità risonanti, si procede come segue. L'energia a riposo della cavità risonante è data da:

$$E_{grav} = (mc^2 + Nhv_0)\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}$$
(II.42)

dove *m* è la massa della cavità, *N* il numero di fotoni contenuti nella cavità e v_0 la frequenza di risonanza della cavità in assenza di gravità. Dalla (II.42) è immediato ricavare che il periodo fondamentale dell'orologio a cavità risonante è dato, nell'approssimazione già usata, dalla (II.41).

⁸Una trattazione identica a quella qui proposta si trova in [48].

Sono stati effettuati esperimenti tesi a verificare il principio dell'invarianza locale di posizione (Local Position Invariance, LPI) usando standard di frequenza appartenenti alla classe *EM*, considerati come orologi diversi perché aventi una struttura interna differente. LPI asserisce che 'l'esito di ogni esperimento locale non gravitazionale non dipende da dove e quando esso è eseguito nell'Universo'. LPI suggerisce il cosiddetto 'null gravitational redshift test': si considerino due standard di frequenza differenti; LPI implica che il rapporto tra le loro frequenze sia lo stesso in ogni punto dello spazio e ad ogni istante di tempo. Il primo esperimento di questo tipo è stato eseguito nel 1983: in esso, le frequenze di due maser ad idrogeno e di tre 'Supercoducting Cavity Stabilized Oscillators' (SCSO) sono state misurate in funzione del moto orbitale terrestre [49]. Per una rassegna abbastanza recente, si veda [50]. Tutti gli standard di frequenza usati in questi esperimenti appartengono alla classe EM che usa la radiazione elettromagnetica come standard di frequenza: pertanto, sebbene siano orologi diversi in base alla loro diversa struttura fisica, essi non usano standard di freguenza diversi. In altri termini: LPI dovrebbe essere corroborato usando classi diverse di standard di frequenza. A mia conoscenza, non è disponibile una descrizione di come la gravità influenzi il periodo fondamentale degli orologi al quarzo che, come abbiamo visto, soddisfano la (II.41). Infine, sarebbe interessante verificare se la vita media di particelle instabili soddisfa la (II.41). Purtroppo, l'accuratezza con cui è nota la vita media dei muoni (di gran lunga la più accurata) è dell'ordine di 10⁻⁶, mentre la variazione del termine χ/c^2 dovuta al moto orbitale terrestre è dell'ordine di 10^{-12} . D'altra parte, come già osservato in precedenza, la accuratezza con cui sono noti i parametri di decadimento dei nuclei radioattivi non rende oggi praticabile un esperimento alla Hafele e Keating (o alla Alley) con orologi radioattivi.

II.5 Lo spazio - tempo è un oggetto?

Abbiamo a suo tempo definito come 'oggetto' una entità teorica, per esempio 'elettrone', la cui esistenza nel Mondo appare plausibile o verosimile sulla base della conoscenza acquisita. Lo spazio - tempo della relatività speciale è un'entità teorica le cui proprietà sono descritte da due grandezze fisiche: la lunghezza ed il tempo. La lunghezza descrive una proprietà di oggetti come, per esempio, una scatola o l'oggetto costituito da due specchi paralleli collocati in due punti diversi dello spazio (per esempio, gli specchi 'sospesi' di un interferometro usato negli esperimenti sulle onde gravitazionali). In quest'ultimo caso, la lunghezza dell'oggetto è chiamata 'distanza' tra i due

Giuseppe Giuliani - Elettromagnetismo relatività quanti

specchi. Siccome gli orologi, strumenti costruiti per *generare e mostrare* la variabile tempo, non misurano proprietà di alcunché distinto da sé, lo spazio - tempo della relatività speciale non può essere un oggetto. Esso è quindi solo un formalismo matematico la cui funzione è quella di permettere di fare predizioni circa il risultato di misure relative a lunghezze o intervalli di tempo. Considerazioni analoghe valgono per lo spazio - tempo della relatività generale.
Capitolo III

La teoria di Maxwell

Alla domanda, "Che cosa è la teoria di Maxwell?", io non so rispondere in modo più conciso o più preciso che dicendo: "La teoria di Maxwell è il sistema di equazioni di Maxwell" [11, p. 21].

Heinrich Hertz

III.1 La nascita della teoria

L'Ottocento è stato, per i fenomeni elettromagnetici, un secolo fondamentale. Sul versante sperimentale, le *Experimental Researches in Electricity* di Michael Faraday (1791 - 1867) [68, 51, 67] costituiscono un'opera unica per l'impianto complessivo, la vastità degli argomenti trattati, il rigore e l'efficacia del metodo d'indagine usato. Faraday non aveva ricevuto un'istruzione scolastica formale: in particolare, Faraday non imparò mai ad usare gli strumenti di calcolo offerti dalla matematica. Di conseguenza, nei suoi lavori, non compare alcuna formula. Sembrerebbe quindi che Faraday abbia sistematicamente ignorato il monito di Galileo quando scriveva:

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto [6, p. 232].

Capitolo III - La teoria di Maxwell

In realtà, Faraday, pur non usando alcuna formula, formulò leggi quantitative e cercò sempre una descrizione coerente dei fenomeni studiati dando a questa descrizione una forma tale da poterla considerare come una teoria. Nell'Introduzione del suo Trattato, James Clerk Maxwell (1831 - 1879) scrive:

Procedendo nello studio di Faraday, mi resi conto che *il suo metodo di concepire i fenomeni era anche un metodo matematico, sebbene non espresso nella forma convenzionale di simboli matematici.* Ho inoltre scoperto che questi metodi erano suscettibili di essere espressi nelle consuete forme matematiche, e, quindi, di essere confrontati con quelli dei matematici di professione [13, p. X; corsivo mio].

E più avanti:

Se con qualcosa che ho scritto qui ho potuto aiutare qualche studente a comprendere i modi di pensare e di esprimersi di Faraday, considererò questo risultato come la realizzazione di uno dei miei scopi principali: trasmettere ad altri lo stesso piacere che ho provato io stesso nella lettura delle *Ricerche* di Faraday [13, p. XIV].

Il metodo di indagine usato da Faraday può essere considerato come un archetipo dell'indagine sperimentale. Un esperimento significativo, cioè un esperimento in grado di produrre nuova conoscenza, nasce dalle conoscenze acquisite ed è ideato per 'interrogare la Natura' circa una questione irrisolta: l'idea dell'esperimento non può essere dedotta con metodi logici dalla conoscenza acquisita, ma richiede un apporto creativo da parte dello sperimentatore consistente in una ipotesi su 'come dovrebbero andare le cose nel Mondo'. Successivamente, lo sperimentatore deve essere in grado di valutare se l'esperimento condotto è compatibile con l'ipotesi di partenza o la falsifica; in quest'ultimo caso, l'ipotesi di partenza deve essere modificata e, di conseguenza, un esperimento nuovo (nuovo perché basato su una ipotesi nuova) deve essere ideato. Questa procedura è sistematicamente e magistralmente applicata nelle *Experimental Researches*. Con le parole di Maxwell:

Il metodo usato da Faraday nelle sue ricerche consisteva in un costante ricorso all'esperimento come mezzo per verificare la correttezza delle sue idee, e in una costante elaborazione di idee sotto il diretto influsso dell'esperimento [52, p. 162].

Maxwell afferma che il suo compito è stato quello di sviluppare in forma matematica le concezioni di Faraday basate sull'idea di «azione attraverso

un mezzo da una porzione alla porzione contigua [52, p. 146]». Qui Maxwell ribadisce che la sua descrizione dei fenomeni elettromagnetici, analogamente a quella di Faraday, è basata, come diremmo oggi, sul concetto di 'campo' invece che su quello di 'azione a distanza' che aveva caratterizzato, per esempio, l'approccio di Coulomb nella descrizione dell'interazione tra due cariche elettriche.

Una teoria di campo è una teoria locale, nel senso che le sue leggi connettono i valori di due grandezze fisiche in un medesimo punto dello spazio allo stesso istante o in due punti distinti dello spazio in due istanti successivi t_1 e t_2 con la limitazione che la distanza tra i due punti d non può essere superiore a $c(t_2 - t_1)$, dove c è la velocità della luce nel vuoto ed è una velocità limite. Questa condizione, espressa in termini di causalità, implica che l'evento 'effetto' non può essere temporalmente anteriore all'evento 'causa'.

Il risultato ottenuto da Maxwell è stato di fondamentale importanza: non solo la sua teoria inquadrava i fenomeni elettromagnetici allora noti, ma prediceva la propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche sotto forma di 'onde elettromagnetiche' e mostrava che la luce deve essere descritta come un'onda elettromagnetica.

La teoria di Maxwell è stata sviluppata in un contesto caratterizzato da un'immagine del Mondo in cui l'Etere svolgeva un ruolo fondamentale. Maxwell stesso aveva scritto la voce *Etere* per la nona edizione dell'*Enciclopedia Britannica* [14] in cui il campo elettromagnetico era concepito come una deformazione meccanica dell'Etere. È quindi sorprendente che, ciò non ostante, la teoria di Maxwell sia sopravvissuta all'abbandono dell'Etere, al-la nascita della teoria della relatività speciale e al risorgere della descrizione corpuscolare della luce. La ragione risiede nel fatto che, come sosteneva Hertz, con una efficace e consapevole semplificazione, la «teoria di Maxwell è il sistema di equazioni di Maxwell [11, p. 21]»¹.

La nascita della relatività speciale non ha posto problemi alla teoria di Maxwell per il semplice fatto che essa è una teoria relativistica. Anzi, la teoria di Maxwell ha costituito uno dei fondamenti della teoria della relatività attraverso il postulato einsteiniano secondo cui «la luce nello spazio vuoto si propaga sempre con una velocità determinata *c*, indipendente dallo stato di moto dei corpi emittenti» [27, trad. it. p. 1]. Si osservi che, per quanto riguarda i postulati posti alla base della relatività speciale, il postulato sulla velocità della luce può essere sostituito dal postulato: sono valide le equa-

¹In realtà, come abbiamo appreso e come vedremo in dettaglio per la teoria di Maxwell, le equazioni debbono essere interpretate.

zioni di Maxwell nel vuoto. Ciò sottolinea ancora una volta la stretta connessione tra elettromagnetismo maxwelliano e relatività speciale; connessione peraltro richiamata nel titolo del lavoro di Einstein: 'Sulla elettrodinamica dei corpi in movimento'. In modo indiretto, la teoria di Maxwell è quindi stata la causa delle necessarie modificazioni che si sono dovute apportare alla dinamica newtoniana per trasformarla nella dinamica relativistica.

Con un'opportuna ipotesi *ad hoc*, la teoria di Maxwell può anche descrivere il comportamento statistico dei fotoni (sezione IV.9.3). Infine, le equazioni di Maxwell per il vuoto e senza sorgenti, con il campo elettrico e magnetico sostituiti da opportuni operatori, stanno alla base dell'elettrodinamica quantica. Nella storia della fisica non c'è, forse, un'altra teoria che, come quella di Maxwell, si sia mantenuta vitale e creativa attraverso così numerose e radicali trasformazioni.

In fisica, l'acquisizione di nuove conoscenze è sovente avvenuta grazie a ricerche sperimentali che hanno *suggerito* come *scrivere* leggi in forma matematica. Tuttavia, l'affermazione della validità di quelle leggi equivale, per ognuna di esse, alla assunzione di un nuovo postulato: ciò non è soddisfacente dal punto di vista metodologico. La storia dell'elettromagnetismo, è, da questo punto di vista, esemplare. Nell'Ottocento, dopo decenni di lavori sperimentali (con relativa *scrittura* di leggi *suggerite* dagli esperimenti) e formulazioni teoriche parziali, il contributo di Maxwell segna un'inversione di tendenza: le sue quattro equazioni, integrate dall'equazione che esprime la cosiddetta 'forza di Lorentz', permettono una descrizione dei fenomeni elettromagnetici basata su un procedimento ipotetico - deduttivo. Di questa possibilità, si fece convinto sostenitore Heinrich Hertz:

...in nessun modo una prova diretta di queste equazioni può essere dedotta dall'esperienza. Appare pertanto più logico guardare ad esse indipendentemente dal modo in cui sono state ottenute, considerandole come assunzioni ipotetiche e lasciando dipendere la loro probabilità dal grandissimo numero di leggi naturali che esse abbracciano [11, p. 138].

Effettivamente, è possibile descrivere tutti i fenomeni elettromagnetici nel vuoto, partendo dalle equazioni di Maxwell e dall'espressione della forza di Lorentz. Ciononostante, la consuetudine didattica tuttora vigente nel primo biennio del corso di laurea in fisica ignora questa possibilità e si basa invece sull'approccio che privilegia lo sviluppo storico dell'elettromagnetismo: il punto di partenza è, infatti, la legge di Coulomb, sovente presentata come la legge che descrive la forza con cui due cariche puntiformi si attraggono o respingono, quindi nel contesto concettuale dell'azione a distanza. In questo approccio, il concetto di campo compare come un concetto derivato [53]. Non entriamo nel merito della discussione di quale approccio sia più adatto dal punto di vista didattico, anche perché le scelte didattiche dipendono largamente dal contesto e dalle opzioni culturali dei docenti. È comunque opportuno osservare come il caso dell'elettromagnetismo costituisca un esempio unico: meccanica, termodinamica e fisica quantica sono, di norma, presentate in modo ipotetico - deduttivo.

III.2 Le equazioni

Mostreremo ora come sia possibile presentare la teoria dei fenomeni elettromagnetici nel vuoto in modo ipotetico - deduttivo, partendo dal concetto di campo. Nel seguito, saranno delineati solo i passaggi concettuali: per lo sviluppo dei calcoli, si veda [29].

III.2.1 I campi elettrico e magnetico

Si supponga che in ogni punto di una regione *R* dello spazio sia definita la funzione densità di carica elettrica $\rho(x, y, z, t)$ e la velocità $\vec{v}(x, y, z, t)$ di ρ^2 : allora in ogni punto di *R* è definito anche il vettore $\vec{J} = \rho \vec{v}$ detto vettore densità di corrente.

L'insieme delle seguenti equazioni – equazioni di Maxwell – individuano due campi vettoriali $\vec{E} \in \vec{B}$, detti rispettivamente campo elettrico e campo magnetico:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{III.1a}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
(III.1b)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{III.1c}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$
(III.1d)

dove ε_0 e μ_0 sono, rispettivamente, la *costante dielettrica* e la *permeabilità magnetica* del vuoto ³.

 $^{^2 {\}rm Come}$ si può verificare in base alle stesse equazioni di Maxwell, ρ e \vec{J} non sono indipendenti: si veda più avanti.

 $^{^{3}}$ Il teorema di Helmoltz assicura che un campo vettoriale è noto se sono noti la sua divergenza e il suo rotore.

I due campi vettoriali \vec{E} e \vec{B} sono tali che la forza che si esercita su una carica puntiforme q, posta in un punto P e dotata di velocità \vec{v} , è data da:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{III.2}$$

dove $\vec{E} \in \vec{B}$ sono i valori del campo elettrico e magnetico nel punto *P* considerato. La (III.2), detta *forza di Lorentz*⁴, completa la definizione di \vec{E} e di \vec{B} , stabilendone le dimensioni (nel Sistema Internazionale); di conseguenza determina anche le dimensioni di $\varepsilon_0 \in \mu_0$. Le equazioni di Maxwell (III.1a – III.1d) sono state scritte in forma vettoriale da Oliver Heaviside. Tuttavia, possiamo continuare a denotare le (III.1a – III.1d) come le 'equazioni di Maxwell', lasciando alle ricostruzioni storiche il compito di analizzare la complessa evoluzione della teoria elettromagnetica negli ultimi due decenni dell'Ottocento ⁵: si vedano, ad esempio, i volumi di Edmund Whittaker [54], Jed Buchwald [55] e Olivier Darrigol [56] ⁶.

Le equazioni (III.1a – III.1d) implicano alcune relazioni rilevanti:

 Applicando l'operatore divergenza alla (III.1d), e tenendo conto della (III.1a), nonché del fatto che divrot ≡ 0, si ottiene:

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{III.3}$$

Questa equazione, detta equazione di continuità o di *conservazione della carica*, stabilisce la relazione che deve sussistere tra le sorgenti ρ e $\vec{J} = \rho \vec{v}$ dei campi. Se si integra la (III.3) su un volume τ delimitato da una superficie *S*, si ottiene, utilizzando il teorema della divergenza:

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \vec{J} d\tau = \int_{S} \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \, d\tau$$

⁴Nel Trattato, l'espressione generale del campo elettrico è: $\vec{v} \times \vec{B}$ –grad $\varphi - \partial \vec{A} / \partial t = \vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}$ [52, p. 221]. Quindi, in realtà, la forza di Lorentz era già presente nel Trattato.

⁵Una analoga vicenda ha riguardato la legge fondamentale della dinamica newtoniana. Infatti, Newton non ha mai scritto la formula $\vec{F} = m\vec{a}$, dovuta invece a Jacob Hermann (1716) e, successivamente, a Eulero.

⁶Il libro di Whittaker, non ostante abbia più di un secolo di vita, rimane ancora un riferimento bibliografico imprescindibile. Nell'introduzione del suo volume, Darrigol lo commenta così: «... esso contiene una descrizione particolarmente chiara delle teorie elettrodinamiche del diciannovesimo secolo. Whittaker è maggiormente incisivo quando parla della tradizione britannica, tradizione nella quale egli stesso si era formato. Diversamente, la sua descrizione dell'elettrodinamica continentale è sovente modernizzata; egli, inoltre, dedica poca attenzione a questioni epistemologiche di fondo e sorvola sull'attività sperimentale [56, p. vii].»

Cioè: il flusso della carica elettrica attraverso la superficie *S* nell'unità di tempo è uguale alla variazione, nell'unità di tempo e cambiata di segno, della carica totale contenuta nel volume τ ; la *carica elettrica* si conserva.

2. Se \vec{E}_1 e \vec{B}_1 sono le soluzioni delle equazioni di Maxwell per una data distribuzione di sorgenti ρ_1, \vec{J}_1 , ed \vec{E}_2, \vec{B}_2 sono le soluzioni corrispondenti alla distribuzione di sorgenti ρ_2, \vec{J}_2 , allora la soluzione corrispondente alla distribuzione di sorgenti ($\rho_1 + \rho_2, \vec{J}_1 + \vec{J}_2$) è data da $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ e $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Questo risultato, che segue immediatamente dal fatto che le equazioni di Maxwell sono lineari in \vec{E} e \vec{B} , è noto sotto il nome di *regola di sovrapposizione*.

Le equazioni di Maxwell (per lo spazio vuoto) espresse in funzione dei campi, connettono la coppia di funzioni [$\rho(x, y, z, t)$, $\vec{J}(x, y, z, t)$] con la coppia [$\vec{E}(x, y, z, t)$, $\vec{B}(x, y, z, t)$]. Dal punto di vista matematico, possiamo considerare la prima coppia di funzioni come il dato noto e cercare di risolvere il sistema di equazioni per trovare la seconda coppia; o viceversa.

Ouesta ambivalenza formale non è accettabile dal punto di vista fisico e deve essere risolta 'interpretando' la teoria: si tratta quindi, in primo luogo, di individuare quali siano le connessioni causali operanti nella teoria e nei fenomeni descritti dalla teoria (pagina 12). L'interpretazione moderna è quella secondo cui sono le cariche elettriche a generare i campi: le cariche elettriche generano i campi $\vec{E} \in \vec{B}$; questi, a loro volta, producono su una carica puntiforme q, posta in un punto determinato, la forza $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Possiamo descrivere questa interpretazione con la seguente seguenza formale: cariche (sorgenti) \rightarrow campi \rightarrow forze sulle cariche (oggetto). In questa sequenza, ogni freccia descrive una connessione causale. È opportuno sottolineare ancora come queste connessioni causali non siano intrinseche alle equazioni di Maxwell, ma 'imposte' dalla nostra interpretazione. Infatti, nel tardo Ottocento, Hertz, e in Italia Galileo Ferraris, propendevano per l'interpretazione secondo cui erano i campi a produrre le cariche elettriche. Per comprendere come questa interpretazione fosse allora plausibile è necessario ricordare che lo spazio non era vuoto a causa della presenza dell'Etere e che non era chiaro cosa fosse l'elettricità o la carica elettrica; in particolare, non era acquisita l'idea della natura discreta della carica elettrica. Per illustrare questa interpretazione, Hertz prendeva in considerazione il caso di un condensatore piano e mostrava come, all'epoca, fossero possibili quattro 'rappresentazioni' della fisica del condensatore caratterizzate dal passaggio da una descrizione basata sull'azione a distanza' pura ad una descrizione pura di 'campo' ⁷. Quest'ultima, era schematizzata dalla figura III.1.



Figura III.1. Descrizione di un condensatore elettricamente carico secondo la rappresentazione di campo 'pura', secondo Hertz. Le cariche positive sono indicate dalle zone nere; quelle negative dalle zone tratteggiate. Sulle armature non ci sono cariche libere, ma solo cariche di polarizzazione: queste compaiono come risultato dello stato di polarizzazione dell'etere o del mezzo materiale. Scrive Hertz: «...noi dobbiamo adesso considerare questa rappresentazione come definiente la natura di una carica elettrica attraverso lo stato di polarizzazione dello spazio (considerato come noto) [11, p. 26].»

La concezione di Hertz riflette quella che si rintraccia nel Trattato di Maxwell. Maxwell scrive:

Nel caso della bottiglia di Leida in cui il rivestimento interno è carico positivamente, ogni porzione di vetro avrà il suo lato interno carico positivamente e il suo lato esterno carico negativamente...Pertanto, la carica alla superficie di separazione tra un conduttore e il dielettrico circostante, che nella vecchia teoria era chiamata carica del conduttore, nella teoria dell'induzione deve essere chiamata la *carica superficiale del dielettrico circostante*. Secondo questa teoria, *ogni carica è l'effetto residuale della polarizzazione del dielettrico*. Questa polarizzazione esiste ovunque all'interno della materia, ma lì è neutralizzata dalla giustapposizione di parti cariche in senso opposto, così che gli effetti della carica si manifestano solo alla superficie del dielettrico [13, §111, p. 155; corsivi miei].

L'interpretazione dell'elettromagnetismo di Hertz e Ferraris era diffusa alla fine dell'Ottocento. È interessante, in questo contesto, considerare come era spiegato il riscaldamento di un filo percorso da una corrente continua (figura III.2).

È immediato verificare che il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie di un tratto di filo è uguale a I^2R , dove R è la resistenza elettrica del tratto di filo considerato. Poynting commentava così questo risultato:

⁷Il termine rappresentazione usato da Hertz può essere inteso, in senso lato, equivalente al nostro concetto di interpretazione.



Figura III.2. Filo percorso da una corrente continua *I*. Sono mostrati il campo elettrico \vec{E} , il campo magnetico \vec{B} e il vettore di Poynting $\vec{S} = (1/\mu_0)\vec{E} \times \vec{B}$.

Sembra pertanto che nessuna parte dell'energia di una corrente viaggi lungo il filo, ma che essa provenga dal mezzo isolante circostante; appena essa penetra, incomincia ad essere trasformata in calore; la quantità [di energia] che attraversa strati successivi del filo va diminuendo finché, quando viene raggiunto il centro, dove non c'è campo magnetico e pertanto passaggio di energia, essa è stata tutta trasformata in calore. Una corrente di conduzione può allora essere considerata come costituita da questo flusso entrante di energia con i suoi associati campi magnetici ed elettrici e la trasformazione dell'energia in calore nel conduttore [57, p. 351].

E Ferraris:

Ora ecco la conseguenza a cui conduce questo teorema [di Poynting]. In un filo percorso da una corrente elettrica la forza elettrica è longitudinale mentre quella magnetica, perpendicolare al piano passante per l'asse, è tangenziale; il flusso dell'energia è adunque radiale e diretto verso l'interno. L'energia non fluisce nel filo longitudinalmente, ma entra dall'esterno normalmente alla superficie, ed entrata, si trasforma in calore [58, p. 461].

In termini di connessioni causali, possiamo parafrasare le asserzioni di Poynting e Ferraris dicendo che 'il flusso di energia entrante attraverso la superficie del filo *causa* il riscaldamento del filo.' Naturalmente, oggi non faremmo questa affermazione, ma asseriremmo che il riscaldamento del filo è causato dal trasferimento agli ioni del metallo dell'energia acquisita dagli elettroni sotto l'azione del campo elettrico, provocando così un incremento della loro energia cinetica e, quindi, della temperatura del filo. Mi pare che questo sia un esempio illuminante di come le connessioni causali vengano sovrapposte alle equazioni all'interno di una immagine del Mondo, e di come queste ultime siano elaborate sulla base della conoscenza considerata acquisita. Nell'immagine del Mondo di Hertz, Poynting e Ferraris – caratterizzata da una scarsa conoscenza della struttura microscopica della materia – le entità teoriche fondamentali erano i campi, considerati realmente esistenti come deformazioni meccaniche dell'Etere. La prima teoria della conduzione elettrica nei metalli apparirà, per opera di Drude, solo nel 1900 [60]. La spiegazione causale del riscaldamento del filo da parte di Poynting e Ferraris era, allora, plausibile; ma non ebbe il tempo per divenire verosimile (plausibilità che persiste nel tempo) in seguito alla comparsa delle teorie microscopiche della conduzione elettrica.

III.2.2 I potenziali elettromagnetici

Le equazioni di Maxwell, scritte in funzione dei potenziali elettromagnetici, assumono la forma:

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
(III.4a)

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$
(III.4b)

I potenziali sono legati ai campi dalle relazioni:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}; \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
(III.5)

Le equazioni (III.4a, III.4b) si ottengono da quelle dei campi, ponendo nel corso della loro deduzione:

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{III.6}$$

Questa condizione, detta di Lorenz, è invariante per trasformazioni di Lorentz. Usando il formalismo spazio - temporale, le quattro equazioni scalari dei potenziali possono essere ridotte ad una sola equazione tra due quadrivettori:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial (c^2 t^2)} - \nabla^2\right)\phi_{\mu} = \Box\phi_{\mu} = \mu_0 J_{\mu} \qquad \mu = ct, x, y, z \tag{III.7}$$

dove:

$$\phi_{\mu} \equiv (\frac{\varphi}{c}, A_i); \qquad i = x, y, z \tag{III.8}$$

è il quadripotenziale e:

$$J_{\mu} \equiv (\rho c, J_i); \qquad i = x, y, z \tag{III.9}$$

66

è la quadricorrente. L'operatore:

$$\Box \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial (c^2 t^2)} - \nabla^2\right) \tag{III.10}$$

è l'operatore di d'Alembert. Quindi, usando il formalismo spazio - temporale, le equazioni di Maxwell si riducono ad una sola equazione (III.7) che lega il quadripotenziale alla quadricorrente. Si dice che questa equazione è invariante a vista per trasformazioni di Lorentz perché si vede a vista che essa ha la stessa forma in ogni SRI. Infatti essa in un altro SRI si scrive:

$$\Box' \phi'_{\mu} = \mu_0 J'_{\mu} \qquad \mu = c t', x', y', z'$$
(III.11)

perché l'operatore di d'Alembert ha la stessa forma in ogni SRI e le componenti non accentate di un quadrivettore si trasformano in quelle accentate passando da un SRI all'altro.

Se si pongono le sorgenti uguali a zero, le equazioni di Maxwell descrivono la propagazione dei potenziali e dei campi in uno spazio privo di sorgenti. Le corrispondenti equazioni si riducono alla equazione delle onde di d'Alembert. Si ha, per i potenziali:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$
 (III.12a)

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$
 (III.12b)

dove abbiamo posto $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. *c* è quindi la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Formule identiche valgono per i campi.



Figura III.3. I potenziali nel punto P_1 all'istante *t* sono generati dalle sorgenti nel volume $d\tau_2$ all'istante $(t - r_{21}/c)$; sono potenziali *ritardati*.

In presenza di sorgenti contenute in un volume finito dello spazio τ_2 (figura III.3), sono integrali particolari delle equazioni (III.4a, III.4b) le seguenti

funzioni:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2, t - r_{21}/c)}{r_{21}} d\tau_2$$
(III.13a)

$$A_i(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_i(x_2, y_2, z_2, t - r_{21}/c)}{r_{21}} d\tau_2$$
(III.13b)

Queste equazioni mostrano che i potenziali – e, di conseguenza, i campi – nel punto P_1 all'istante t sono determinati dallo stato delle sorgenti ad un istante precedente $t - r_{21}/c$ poste alla distanza r_{21} dal punto P_1 ⁸. Questi potenziali si chiamano *ritardati*.

Sono soluzioni particolari delle equazioni (III.4a, III.4b) anche le funzioni:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2, t + r_{21}/c)}{r_{21}} d\tau_2$$
(III.14a)

$$A_i(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_i(x_2, y_2, z_2, t + r_{21}/c)}{r_{21}} d\tau_2$$
(III.14b)

Esse differiscono dalle precedenti per lo scambio del segno (–) con il segno (+) nell'argomento delle funzioni integrande. In questo caso, i potenziali si chiamano *avanzati*: il valore del potenziale nel punto P_1 all'istante t è dovuto allo stato delle sorgenti poste nel generico volume $d\tau_2$, ma all'istante *successivo* $t'' = t + r_{21}/c$. Soluzioni di questo tipo sono escluse perché, in assenza di ipotesi aggiuntive, violano il principio di causalità.

Questo è il secondo caso in cui una soluzione matematica è scartata invocando il principio di causalità. Era già successo a proposito della derivazione delle trasformazioni di Lorentz secondo il procedimento di Cattaneo (pagina 32). Nel caso presente la descrizione matematica non è deterministica, perché prevede due soluzioni possibili: i potenziali 'avanzati' e i potenziali 'ritardati'. Possiamo però affermare che il sistema fisico costituito dalla distribuzione finita di cariche elettriche, è deterministico (cioè produce un campo elettromagnetico univocamente determinato), *se si invoca il principio di causalità* e *se si descrive questo sistema con le equazioni di Maxwell.*

⁸Le formule che esprimono i potenziali elettromagnetici costituiscono un caso esemplare di legge fisica che incorpora visivamente la condizione di località (pagina 25).

Una situazione analoga si incontra considerando soluzioni a simmetria sferica dell'equazione di d'Alembert per le onde elettromagnetiche:

$$\nabla^2 \phi(r,t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi(r,t)}{\partial t^2} = 0$$
 (III.15)

dove la $\phi(r, t)$ è una funzione che dipende solo da r e da t. La funzione:

$$\phi(r,t) = \frac{1}{r} f_1(r-ct)$$
(III.16)

è una soluzione della (III.15). Ma anche la funzione:

$$\phi(r,t) = \frac{1}{r} f_1(r+ct)$$
(III.17)

è una soluzione della stessa equazione. La (III.16) descrive un'onda sferica che si propaga dall'origine verso l'esterno e la cui ampiezza decresce come la funzione 1/r. La (III.17) descrive invece un'onda sferica che, provenendo dall'infinito, si concentra nell'origine.

Diversi fisici hanno preso in considerazione anche l'uso dei potenziali avanzati. Richard Feynman dedica alcune pagine a questo problema nelle sue lezioni [153, p. 17 - 23], discutendo delle forze che un elettrone, descritto come una particella di dimensioni finite, esercita su se stesso.

I potenziali ritardati dovuti ad una carica puntiforme in moto qualunque sono dati da (figura III.4):

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_{21}^* - \vec{v}^* \cdot \vec{r}_{21}^*/c}$$
(III.18a)

$$\vec{A}(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}^*}{r_{21}^* - \vec{v}^* \cdot \vec{r}_{21}^* / c}$$
(III.18b)

ove le grandezze con l'asterisco devono essere valutate all'istante *ritardato* $t^* = t - r_{21}^*/c$. Questi potenziali sono detti di Liénard e Wiechert perché ricavati, indipendentemente, da Alfred - Marie Liénard e Emil Wiechert a cavallo tra Ottocento e Novecento.

Dai potenziali si ricavano poi i campi mediante le equazioni:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
 (III.19a)

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \tag{III.19b}$$

69



Figura III.4. Carica puntiforme *q* in moto qualunque lungo la traiettoria disegnata. Il punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ è quello in cui si calcolano i potenziali all'istante *t*. Il punto $Q_2(x_2, y_2, z_2)$ è la posizione attuale della carica (all'istante *t*); il punto $Q_2^*(x_2^*, y_2^*, z_2^*)$ la sua posizione all'istante *ritardato* $t^* = t - (r_{21}^*/c)$.

Si noti che, nel caso della carica puntiforme, vale la relazione:

$$\vec{A} = \varphi \frac{\vec{v}^*}{c^2}$$

dove \vec{v}^* è la velocità della carica all'istante ritardato $t^* = t - r_{21}^*/c$.

Le formule che esprimono i campi generati da una carica puntiforme in moto qualunque sono molto complesse. Il campo elettrico è dato da:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{d^{*^3}} \left\{ \left(1 - \frac{v^{*^2}}{c^2} \right) \left(\vec{r}_{21}^* - \frac{r_{21}^*}{c} \vec{v}^* \right) + \frac{1}{c^2} \vec{r}_{21}^* \times \left[\left(\vec{r}_{21}^* - \frac{r_{21}^*}{c} \vec{v}^* \right) \times \vec{a}^* \right] \right\}$$
(III.20)

dove:

$$d^* = r_{21}^* - \frac{\vec{v}^* \cdot \vec{r}_{21}^*}{c}$$
(III.21)

mentre il campo magnetico è dato da:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{r}_{21}^* \times \vec{E} \tag{III.22}$$

Si osservi come nell'espressione del campo elettrico e magnetico compaia un termine del tipo $1 - v^2/c^2$ tipico della relatività speciale.

È interessante discutere due casi limite:

A) la velocità della carica è piccola rispetto a *c* e varia lentamente: si possono quindi trascurare nella (III.20) i termini di ritardo e quelli contenenti l'accelerazione. Ne segue che possiamo porre nella (III.20) $r_{21}^* = r_{21}$.

Si osservi che vale la relazione:

$$\vec{r}_{21}^* - \vec{r}_{21} = \vec{s}$$

dove \vec{s} è lo spostamento da Q^* a Q. La differenza massima tra r_{21}^* e r_{21} si ha quando \vec{s} è diretto come \vec{r}_{21}^* o in senso contrario. In questi casi si ha:

$$r_{21}^* - r_{21} = \mp < v > (t - t^*)$$

dove < $v > \dot{e}$ la velocità media della carica tra $Q^* e Q$. Cioè, ricordando che $t - t^* = r_{21}^* / c$:

$$\frac{r_{21}}{r_{21}^*} = 1 \pm \frac{\langle v \rangle}{c} \approx 1; \qquad \text{se}\,\frac{\langle v \rangle}{c} \ll 1$$

In questa situazione, essendo:

$$r_{21}^* \approx r_{21} \quad \text{e} \quad d^* \approx r_{21} \quad \vec{v}^* \approx \vec{v}$$
 (III.23)

si ha dalla (III.20):

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3} \left(\vec{r}_{21} - r_{21} \frac{\vec{v}}{c} \right)$$
(III.24)

e, applicando la (III.22):

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \, q \frac{\vec{v} \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$
(III.25)

La (III.24) si riduce alla legge di Coulomb se la carica è in quiete. Invece, la (III.25) conduce, con opportuni passaggi, alla legge di Biot e Savart che fornisce il campo magnetico generato da un filo conduttore percorso da una corrente continua o lentamente variabile. Si consideri un circuito filiforme percorso dalla corrente *I*. In base alla (III.25), un suo elemento infinitesimo \vec{dl} produrrà un campo magnetico pari a:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} n \, e \, S \, d \, l \, \frac{\vec{v}_d \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d \, l \times \vec{r}}{r^3} \tag{III.26}$$

dove \vec{r} è il vettore spiccato dall'elemento di filo dl verso il punto in cui si calcola il campo, S è la sezione del filo, n il numero di elettroni per unità di volume, e il valore assoluto della loro carica, \vec{v}_d la loro velocità di deriva cambiata di segno e il vettore \vec{dl} è diretto come la corrente. Integrando la (III.26), si ottiene la legge di Biot e Savart:

$$\vec{B}(x, y, z, t) = I \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{d}l \times \vec{r}}{r^3}$$
(III.27)

B) La carica si muove in una regione dello spazio le cui dimensioni lineari sono piccole rispetto alla distanza r_{21}^* , la sua velocità è piccola rispetto a c

e la distanza r_{21}^* è sufficientemente grande da poter trascurare nella (III.20) i termini dipendenti da $1/r_{21}^{*^2}$ rispetto a quelli dipendenti da $1/r_{21}^*$. Sotto queste condizioni, essendo:

$$r_{21}^* \approx r_{21}$$
 e $d^* \approx r_{21}$

si ottiene:

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r_{21}^3} [\vec{r}_{21} \times (\vec{r}_{21} \times \vec{a}^*)]$$
(III.28)



Figura III.5. La carica *q* si muove di moto qualunque; \vec{a}^* è la sua accelerazione ritardata; il versore \hat{n} è diretto come il vettore $\vec{r}_{21} \times (\vec{r}_{21} \times \vec{a}^*)$.

Il campo elettrico è quindi diretto, se q > 0, come il versore \hat{n} della figura III.5; la sua componente lungo \hat{n} , che è perpendicolare a \vec{r}_{21} , è data da:

$$E_{\perp} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r_{21}} a^* \sin\theta^* = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r_{21}} a_{\perp}^* = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r_{21}} a_{\perp} \left(t - \frac{r_{21}}{c}\right)$$
(III.29)

dove abbiamo introdotto il simbolo \perp per ricordare che il campo elettrico è diretto lungo la perpendicolare a \vec{r}_{21} . Questa formula, insieme a quella relativa al campo magnetico, fornisce il campo, detto *di radiazione*, generato da una carica in moto. Essa descrive il fenomeno basilare della generazione delle onde elettromagnetiche.

III.3 Misura del campo elettrico di un'onda luminosa

In tempi recenti è stato misurato, per la prima volta, il campo elettrico di un impulso laser [22] al limite rosso dello spettro visibile. Lungo l'asse zè lanciato un impulso laser (750 nm), *polarizzato linearmente* lungo l'asse x. L'impulso laser, sfruttando la tecnica della produzione di armoniche superiori in un gas di atomi di neon, produce un impulso XUV sincronizzato con l'impulso laser e propagantesi nella stessa direzione. I due impulsi investono un bersaglio costituito da un getto di atomi di neon. Elettroni liberati dall'impulso XUV con una energia cinetica iniziale nota (con una approssimazione stimata) sono sottoposti al campo elettrico periodico dell'impulso laser. L'energia cinetica iniziale dei fotoelettroni W_i deve essere maggiore della variazione dell'energia cinetica ΔW dovuta al campo elettrico dell'impulso laser. Dalla misura dell'energia cinetica di questi elettroni è possibile risalire al valore del campo elettrico dell'impulso laser. La riuscita dell'esperimento è sottoposta a condizioni molto stringenti: il periodo T dell'impulso laser è uguale a 2.5×10^{-15} s; allora, la durata dell'impulso XUV deve essere ragionevolmente minore di T in modo tale che, appena emessi, gli elettroni siano sottoposti ad un valore definito del campo elettrico dell'impulso laser; il volume in cui gli elettroni sono accelerati deve essere sufficientemente ridotto affinché gli elettroni siano sottoposti ad un campo elettrico ragionevolmente omogeneo durante la loro accelerazione. La formula che descrive la variazione della quantità di moto di un elettrone è data da:

$$\Delta p(\vec{r},t) = -e \int_{-\infty}^{t} E_L(\vec{r},t') dt' = -e \int_{-\infty}^{t} -\frac{\partial A_L(\vec{r},t')}{\partial t'} dt' = e A_L(\vec{r},t) \quad \text{(III.30)}$$

dove E_L e A_L sono, rispettivamente, il campo elettrico e il potenziale vettore dell'impulso laser legati dalla relazione $E_L = -dA_L/dt$. Dalla (III.30) si vede che la variazione della quantità di moto di un elettrone è proporzionale al valore istantaneo del potenziale vettore nel punto in cui si trova l'elettrone. Il rivelatore di elettroni misura la loro energia cinetica; conoscendo l'energia cinetica iniziale W_i degli elettroni, si risale alla variazione di energia cinetica ΔW dovuta al campo elettrico. Essendo $\Delta W = (p_i/m)\Delta p$, la misura di W, permette di ricavare Δp e, quindi, attraverso la (III.30) il potenziale vettore A_L e, infine, il campo elettrico E_L dell'impulso laser, la cui ampiezza risulta essere di $\approx 7 \times 10^7 \text{V cm}^{-1}$.

Questa misura si presta ad alcune riflessioni che hanno come sfondo l'Introduzione di questo volume ed i criteri epistemologici adottati. Innanzitutto, una misura di questo tipo è stata resa possibile dai progressi della tecnologia ispirata dagli avanzamenti della conoscenza fisica. In secondo luogo, dobbiamo osservare come la misura del campo elettrico dell'impulso laser non implica che l'entità teorica onda luminosa esista nel Mondo: l'asserzione di esistenza nel Mondo di una entità teorica deve essere fatta sulla base dell'intera conoscenza acquisita ed è, in ogni caso, solo plausibile o verosimile. Da questo punto di vista, non possiamo concordare con gli autori del lavoro che parlano di 'natura ondulatoria' della luce invece di 'descrizione ondulatoria' della luce [22, p. 1267].

III.4 Cariche, campi e causalità

È piuttosto diffusa la consuetudine di interpretare in modo causale due equazioni di Maxwell che trascriviamo qui per comodità:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{III.31}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
(III.32)

La (III.31) è la seconda equazione di Maxwell (III.1b), mentre la (III.32) è la quarta equazione di Maxwell (III.1d) in cui si è posto $\vec{J} = 0$. Per esempio, l'equazione (III.31) viene interpretata dicendo che una variazione temporale del campo magnetico genera un campo elettrico; in modo analogo, è interpretata la (III.32) dicendo che una variazione temporale del campo elettrico genera un campo magnetico. Queste interpretazioni sono apparentemente analoghe all'interpretazione della legge della dinamica secondo cui una variazione temporale della quantità di moto genera una forza (pagina 12). Queste interpretazioni non sono fondate.

Avendo assunto che le sorgenti dei campi sono le cariche elettriche (attraverso $\rho \in \vec{J}$), cioè che le cariche sono le cause dei campi, non possiamo poi assumere che i campi siano, a loro volta, sorgenti ⁹. Infatti, interpretare causalmente la (III.31) e la (III.32) significa introdurre una catena causale che si sovrappone a quella secondo cui sono le cariche a generare i campi.

Secondo questa interpretazione, le cariche generano (sono la causa dei) i campi attraverso i potenziali; di conseguenza, le equazioni (III.31) e (III.32) descrivono semplicemente le relazioni esistenti tra campo elettrico e magnetico così come sono generati dalle cariche. Naturalmente, queste relazioni, pur non potendo essere interpretate causalmente nel modo sopra indicato, permettono di fare predizioni.

A questo proposito, è interessante prendere di nuovo in considerazione la fisica del condensatore. Incominciamo riscrivendo la quarta equazione

⁹L'idea che i campi siano a loro volta causa di altri campi riprende, parzialmente, la concezione hertziana secondo cui i campi costituiscono la realtà primitiva.

di Maxwell per il vuoto:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$
(III.33)

Il termine $\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ ha le stesse dimensioni di \vec{J} cioè quelle di una densità di corrente. Maxwell ha denotato questo termine con il nome di densità di corrente di spostamento. Siccome a J_s non corrisponde alcuna corrente, intesa come moto di cariche libere, sarebbe opportuno denotare J_s con il nome 'termine di Maxwell', spogliandolo così di ogni sembianza che richiami il concetto di corrente. È immediato verificare che, tra le armature di un condensatore, la corrente di spostamento è uguale a quella che circola nel conduttore che collega le due armature durante la scarica (o la carica) del condensatore ed è diretta nella stessa direzione.

Per esempio, indicando con \vec{J}_s la densità di corrente di spostamento all'interno del condensatore, si ha, durante la scarica ¹⁰:

$$\vec{J}_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{III.34}$$

Siccome, $\vec{E} = \sigma / \varepsilon_0 \hat{n}$, la (III.34) assume la forma:

$$\vec{J}_s = -\left|\frac{d\sigma}{dt}\right|\hat{n} = -\frac{1}{S}I_c\hat{n}$$
(III.35)

dove I_c è la corrente di conduzione che circola nel filo e *S* la superficie delle armature. Una formula analoga si ottiene per la carica del condensatore. Pertanto, $I_s = I_c$.

Sovente, nei manuali, il campo magnetico prodotto tra le armature di un condensatore durante la sua carica o scarica è attribuito alla corrente di spostamento, considerata, al pari della corrente di conduzione, come generatrice di un campo magnetico. Come abbiamo visto, questa descrizione è incompatibile con l'interpretazione secondo cui le sorgenti dei potenziali e dei campi sono *solo* le cariche elettriche ed il loro moto. Il campo magnetico all'interno del condensatore dovrebbe essere calcolato usando l'equazione $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, dove \vec{A} è il potenziale vettore dato dalle (III.13b) e le correnti sono quelle che circolano nel filo e quelle radiali che circolano nelle armature del condensatore, supposte circolari. Tuttavia, il calcolo del campo magnetico

¹⁰Al solito, si suppone che la distanza tra le armature sia molto piccola rispetto al raggio delle armature, supposte circolari per semplicità di calcolo.

all'interno del condensatore può essere sviluppato più facilmente applicando il teorema di Stokes ad una circonferenza giacente in un piano parallelo alle armature ed il cui centro giaccia sull'asse del condensatore. Per ragioni di simmetria, il campo magnetico è tangente alla circonferenza ed ha lo stesso modulo in ogni suo punto. Ne segue che:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d}l = 2\pi r B = \int_{S} \operatorname{rot} \vec{B} \cdot \vec{d}S = \mu_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{d}S = \mu_0 I_c \frac{r^2}{R^2}$$
(III.36)

dove R è il raggio delle armature e r la distanza dall'asse del condensatore e dove abbiamo usato la (III.35). Pertanto:

$$B = \mu_0 I_c \frac{r}{2\pi R^2} \tag{III.37}$$

Questo procedimento di calcolo usa solo le relazioni esistenti tra campo magnetico e campo elettrico secondo la quarta equazione di Maxwell e non usa l'ipotesi che il termine di Maxwell sia una sorgente di campo magnetico.

Il ruolo svolto dalla corrente di spostamento nell'elettromagnetismo maxwelliano è stato ampiamente discusso nella letteratura storica. Si possono vedere, a proposito, i già citati volumi di Whittaker [54], Buchwald [55] e Darrigol [56]. Il tema è stato ripreso anche in lavori più recenti [61, 62, 63]. Al lettore che volesse addentrarsi in questa discussione si suggerisce di tener fermo un punto: la natura intrinsecamente deterministica di una equazione costituisce il presupposto formale per una sua interpretazione causale, ma questa è da noi sovrapposta all'equazione in modo compatibile con la conoscenza acquisita.

III.5 Elettromagnetismo e relatività

Abbiamo già avuto modo di osservare come la teoria di Maxwell sia una teoria relativistica. È ora giunto il momento di approfondire questo argomento. Einstein, nel suo lavoro sulla relatività speciale *impone* che le equazioni di Maxwell, scritte in funzione dei campi, abbiano la stessa forma in ogni SRI, cioè siano invarianti per trasformazioni di Lorentz [27, trad. it. p. 12 - 14]. Questa condizione è richiesta dal principio di relatività secondo cui i fenomeni fisici si svolgono nello stesso modo in ogni SRI: ne consegue che le equazioni che li descrivono debbono avere la stessa forma in ogni SRI. Così facendo, Einstein ricava le equazioni di trasformazione dei campi.

Usando il formalismo spazio - temporale, le equazioni di trasformazione dei campi si ottengono direttamente dalle equazioni che esprimono i campi in funzione dei potenziali, usando le equazioni di trasformazione delle componenti del quadripotenziale. Si ottengono così le equazioni:

$$E'_{x} = E_{x}$$

$$B'_{x} = B_{x}$$
(III.38)
$$E'_{y} = \Gamma(E_{y} - VB_{z})$$

$$B'_{y} = \Gamma\left(B_{y} + \frac{V}{c^{2}}E_{z}\right)$$

$$E'_{z} = \Gamma\left(E_{z} + VB_{y}\right)$$
(III.39)
$$B'_{z} = \Gamma\left(B_{z} - \frac{V}{c^{2}}E_{y}\right)$$

Queste equazioni possono anche essere scritte nella forma:

$$E'_{x} = E_{x}$$

$$E'_{y} = \Gamma[E_{y} + (\vec{V} \times \vec{B})_{y}] \qquad (\text{III.40})$$

$$E'_{z} = \Gamma[E_{z} + (\vec{V} \times \vec{B})_{z}]$$

$$B'_{x} = B_{x}$$

$$B'_{y} = \Gamma \left[B_{y} - \frac{1}{c^{2}} (\vec{V} \times \vec{E})_{y} \right]$$

$$B'_{z} = \Gamma \left[B_{z} - \frac{1}{c^{2}} (\vec{V} \times \vec{E})_{z} \right]$$
(III.41)

Infine, è opportuno ricordare che, nella formulazione spazio - temporale, la conservazione della carica elettrica e la condizione di Lorenz sono invarianti 'a vista' per trasformazioni di Lorentz. Infatti, la conservazione della carica:

$$\mathrm{div}\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

si scrive:

$$\nabla_{\mu}J_{\mu} = 0 \tag{III.42}$$

Mentre la condizione di Lorenz:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial (ct)} \left(\frac{\varphi}{c}\right) = 0$$
(III.43)

si scrive:

$$\nabla_{\mu}\phi_{\mu} = 0 \tag{III.44}$$

Le due equazioni (III.42, III.44) sono invarianti a vista perché è invariante la divergenza di un quadrivettore.

Non vi è dubbio che le equazioni di Maxwell scritte in funzione dei potenziali siano da preferirsi sulla base delle seguenti considerazioni:

- 1. Mostrano 'a vista' che il sistema di equazioni di Maxwell non è sovradeterminato
- 2. Si prestano ad una transizione 'naturale' al formalismo spazio temporale
- 3. Facilitano e rendono trasparente l'interpretazione secondo cui sono le cariche a generare (causare) i campi.

Maxwell fece un ampio ed efficace uso dei potenziali elettromagnetici. Tuttavia, verso la fine dell'Ottocento, la scelta di Maxwell fu posta in discussione, in particolare da parte di Heaviside e Hertz. Heaviside, dopo aver discusso l'induzione elettromagnetica in un circuito in moto, scrive:

Il metodo con cui Maxwell ha dedotto [il termine $\vec{v} \times \vec{B}$ nella legge dell'induzione elettromagnetica] è, sostanzialmente lo stesso, in linea di principio; tuttavia, egli usa una funzione *ausiliaria*, il potenziale vettore della corrente elettrica, e ciò complica abbastanza la trattazione, soprattutto se ci si riferisce al *significato fisico* del processo. È sempre desiderabile attenersi, per quanto possibile, ai principi primi [64, p. 46; corsivi miei].

E, più avanti, riferendosi all'equazione (III.1b):

Il fondamento sperimentale [della legge] era l'osservazione di Faraday secondo cui la differenza di potenziale indotta in un circuito conduttore dipendeva dalla variazione del numero delle linee di forza [magnetica] attraverso di esso. Ma, significativamente, *i matematici* non hanno tradotto ciò in simboli in modo diretto per un circuito elementare, ma operarono piuttosto in modo indiretto, ricorrendo ad un integrale calcolato lungo un circuito; o, alternativamente, scrivendo un'equazione per la forza elettromotrice contenente una funzione chiamata potenziale vettore della corrente, e un altro potenziale, l'elettrostatico, *che lavorano insieme ma in modo non facilmente comprensibile – in parole povere – confondendosi a vicenda* [64, p. 68-69; corsivi miei].

E, ancora, a proposito della propagazione delle onde elettromagnetiche:

Avendo considerato queste equazioni di propagazione contenenti i due potenziali non facilmente trattabili ed anche non sufficientemente inclusive, sono stato obbligato ad abbandonarle; e, riandando ai principi primi, ho introdotto quella che chiamo la seconda legge circuitale come una equazione fondamentale, la compagna naturale della prima. Il cambiamento è, a mio giudizio, di natura pratica e ci permette di semplificare e chiarire considerevolmente la trattazione di questioni generali, portando tra l'altro alla luce interessanti relazioni che erano prima nascoste alla vista a causa della presenza del potenziale vettore \vec{A} e dei suoi parassiti $\vec{J} \in \Psi$ [il potenziale scalare] [64, p. 69].

La posizione di Hertz era simile, anche se espressa in modo più raffinato:

Durante la costruzione della nuova teoria il potenziale svolse la funzione di una impalcatura; con la sua introduzione le forze a distanza che comparivano in modo discontinuo in punti particolari venivano sostituite da grandezze che, in ogni punto dello spazio, erano determinate soltanto dalle condizioni dei punti circostanti. Ma dopo aver imparato a considerare le forze stesse come grandezze dell'ultimo tipo, non c'è ragione di sostituirle con i potenziali a meno che non ci sia un vantaggio matematico a farlo. E non mi pare che ci sia un vantaggio di questo tipo introducendo il potenziale vettore nelle equazioni fondamentali; inoltre, ci aspettiamo di trovare in queste equazioni relazioni tra le grandezze fisiche che sono realmente osservate e non tra grandezze che servono solo per sviluppare i calcoli [11, p. 196].

Nelle posizioni di Heaviside e Hertz, non è facile separare le considerazioni epistemologiche da quelle ispirate da una immagine del Mondo. Heaviside usa, nelle sue argomentazioni, il concetto di 'significato fisico' senza tuttavia specificare che cosa si debba intendere per 'significato fisico'. Hertz, è più sottile e più trasparente. Nella prima parte dell'argomentazione, sembra utilizzare implicitamente il suo criterio secondo cui si può eliminare da una descrizione teorica tutto ciò la cui eliminazione non riduce la capacità predittiva di una teoria (i potenziali considerati come i ponteggi che sono utili per costruire un edificio, ma che, alla fine, debbono essere rimossi); nella parte finale usa invece il criterio della misurabilità di una grandezza fisica: mentre i campi sono misurabili, non lo sono - secondo Hertz i potenziali. Nella posizione di Hertz è inoltre evidente l'influsso della immagine del Mondo in cui i campi 'esistono' cioè sono 'reali'. In entrambi i casi, la scelta di privilegiare i campi risente del contesto storicamente dato in cui si intrecciano immagini del Mondo, esperimenti e loro interpretazioni, teorie e loro 'rappresentazioni'. Quando Heaviside e Hertz criticavano l'uso dei potenziali, erano passati circa venti anni dalla pubblicazione del Trattato di Maxwell. La teoria non era ancora consolidata, non ostante il vivace dibattito seguito alla pubblicazione del Trattato, dibattito documentato dalle già citate ricostruzioni storiche [54, 55, 56]. Una delle ragioni del mancato consolidamento della teoria risiede nella condizione di ignoranza in cui si trovavano i protagonisti relativamente alla natura della carica elettrica, condizione di ignoranza di cui essi erano perfettamente consapevoli ¹¹. Inoltre, la supposta presenza dell'Etere e delle sue interazioni con la materia ponderabile complicava la situazione teorica. A cavallo del passaggio del secolo, la scoperta dell'elettrone (1897) ha permesso di iniziare ad applicare le equazioni di Maxwell, scritte in funzione dei potenziali, a cariche puntiformi (Liénard e Wiechert) senza tuttavia eliminare il problema delle possibili dimensioni finite dell'elettrone con le difficoltà connesse, subito poste in luce da Lorentz [65].

III.6 L'induzione elettromagnetica

Il 24 novembre 1831, Faraday presentò alla Royal Society di Londra il lavoro che descrive la scoperta dell'induzione elettromagnetica. Indipendentemente, dall'altra parte dell'oceano atlantico lo stesso fenomeno fu scoperto, nel corso dell'anno successivo, da Joseph Henry. L'induzione elettromagnetica permette di trasformare energia meccanica in energia elettrica. Tutti i processi di produzione di energia elettrica sfruttano il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, ad eccezione di quello che trasforma energia luminosa in energia elettrica mediante cellule fotovoltaiche. Il fenomeno dell'autoinduzione elettromagnetica fu invece scoperto prima da Henry; come riconoscimento di questo risultato, durante l'*International Electrical Congress* svoltosi a Chicago nel 1893, il nome henry fu adottato per denotare l'unità dell'induttanza elettrica. Precedentemente, durante il congresso tenuto a Parigi nel 1881, in onore di Faraday, l'unità di capacità elettrica fu denominato farad.

¹¹Maxwell, a proposito della corrente, scriveva: «La corrente elettrica non può essere concepita se non come un fenomeno cinetico. [...] Gli effetti della corrente, come l'elettrolisi, e il trasferimento di elettricità da un corpo ad un altro, sono tutte azioni progressive che richiedono tempo per essere compiute, e sono pertanto della natura dei moti. Per quanto riguarda la velocità della corrente, essa potrebbe essere dell'ordine di un decimo di pollice all'ora o di un centinaio di miglia al secondo [qui Maxwell cita il paragrafo 1648 delle *Experimental Researches* di Faraday]. Siamo così lontani dal conoscere il suo valore assoluto che non sappiamo neppure se ciò che chiamiamo direzione positiva è la vera direzione del moto o la direzione contraria» [52, § 569, p. 210 - 211].

Tuttavia, furono necessari diversi decenni affinché divenisse possibile la produzione e la distribuzione di energia elettrica: fondamentale fu, a metà degli anni Ottanta del diciannovesimo secolo, l'invenzione del trasformatore. Lucien Gaulard (ingegnere) e Dixon Gibbs (imprenditore) presentarono un esemplare di 'generatore secondario' (trasformatore) all'Esposizione Generale Italiana svoltasi a Torino nel 1884. Galileo Ferraris ebbe a disposizione questo esemplare: eseguì una serie di misure e sviluppò la teoria del trasformatore [66].

III.6.1 Faraday e l'induzione

Faraday cercò di sviluppare, nel corso di oltre un ventennio, una teoria dell'induzione elettromagnetica. Secondo Faraday, si osserva una corrente indotta ogniqualvolta c'è moto relativo tra conduttore e linee di forza magnetiche. Le linee di forza magnetiche sono

...quelle linee che sono mostrate, in generale, dalla disposizione della limatura di ferro o di piccoli aghi magnetici intorno o tra magneti; ho mostrato, spero in modo soddisfacente, come queste linee possano essere assunte quali indicatori del potere magnetico, sia per quanto concerne la disposizione che la quantità; inoltre [ho mostrato] come esse possano essere riconosciute da un filo in moto in un modo del tutto differente, in linea di principio, dalle indicazioni fornite da un ago magnetico, e, in numerosi casi, con grandi e peculiari vantaggi [67, § 3243, p. 407].

Secondo Faraday, le linee di forza magnetica non sono, per usare il nostro linguaggio, solo un'entità teorica, ma esistono, plausibilmente, nel Mondo come oggetti:

Avendo applicato il termine 'linee di forza magnetica' ad un'idea astratta...ho applicato ora il termine 'linee di forza magnetica' includendo l'idea ulteriore della loro esistenza fisica. Il primo insieme di linee si basa direttamente sull'evidenza sperimentale. Il secondo insieme di linee è introdotto essenzialmente per porre la questione della loro esistenza; e sebbene io non avrei sollevato la questione se non l'avessi ritenuta importante, e tale da ricevere alla fine una risposta positiva, continuo a sostenere questa opinione con qualche esitazione, come, peraltro succede per qualunque conclusione io mi sforzi di trarre a proposito di punti concernenti le profondità della Scienza, come, per esempio, quello concernente uno, due, o nessun fluido elettrico; oppure la vera natura di un raggio di luce, o la natura dell'attrazione, persino quella della gravitazione, o la natura generale della materia [67, § 3299, p. 437]. L'esistenza delle linee di forza magnetiche è resa plausibile dalle seguenti considerazioni:

Quando si dice che linee di forza attraversano una spira conduttrice (§ 3087), si deve pensare che ciò è prodotto dalla traslazione di un magnete. Una mera rotazione di un magnete intorno al proprio asse non produce alcun effetto induttivo su circuiti esterni ad esso; perché le condizioni descritte sopra (§ 3088) non sono soddisfatte. Il sistema di forze intorno al magnete non deve essere considerato come necessariamente rotante con il magnete, non più di quanto i raggi emessi dal sole siano considerati ruotare con esso. Il magnete può persino, in certi casi (§ 3097), essere considerato in rotazione tra le sue stesse forze, producendo un effetto elettrico pieno, rilevabile con un galvanometro [67, § 3090, p. 336 - 337; corsivi miei].



Figura III.6. Disco di Faraday. D è un disco conduttore posto sopra un magnete cilindrico M e isolato elettricamente da esso. Disco e magnete possono ruotare intorno al proprio asse indipendentemente uno dall'altro. Per la trattazione teorica quantitativa del disco di Faraday, si veda la sezione III.6.5.

Infatti:

...un disco di rame fu incollato sulla cima di un magnete cilindrico e isolato da esso con un foglio di carta; il magnete ed il disco vennero ruotati insieme, e collettori (connessi al galvanometro) vennero posti in contatto con la circonferenza ed il centro del disco di rame. L'ago del galvanometro si mosse come nel caso precedente [in cui era in rotazione solo il disco], e la direzione di moto era la stessa di quella che si sarebbe osservata se solo il [disco di] rame fosse stato posto in rotazione, e il magnete fosse stato tenuto in quiete. Non c'era alcuna apparente differenza nell'entità della deflessione [dell'ago]. Quindi, la rotazione del magnete non produce alcuna differenza nei risultati; perché un magnete rotante o in quiete produce lo stesso effetto sul [disco di] rame in moto [68, § 218, p. 63]. Nei diari di Faraday è citato anche un esperimento in cui il disco è mantenuto in quiete e il magnete ruota: non c'è corrente indotta [69, p. 203 - 204] ¹². Nella tabella III.1 sono riassunti i risultati degli esperimenti di Faraday eseguiti con un disco conduttore (figura III.6).

Cosa si muove?	Moto relativo	Moto relativo	Corrente
	disco - magnete	disco - laboratorio	indotta
Disco	Sì	Sì	Sì
Magnete	Sì	No	No
Disco e magnete	No	Sì	Sì

Tabella III.1. Esperimenti di Faraday con il disco.

Quindi: il circuito è percorso da corrente se ruota il disco o il magnete insieme al disco; viceversa, non viene indotta alcuna corrente se ruota solo il magnete.

Secondo Faraday, il moto relativo tra conduttore e linee di forza magnetiche è anche la causa della corrente indotta in un circuito da una corrente variabile circolante in un altro circuito:

Nei primi esperimenti (§10, §13), la spira inducente e quella indotta erano poste a distanza fissa ed una corrente elettrica veniva inviata attraverso la prima. In questi casi, le stesse linee di forza debbono essere considerate in moto (se posso usare questa espressione) attraverso la spira indotta, dall'istante in cui esse iniziano ad essere sviluppate finché la forza magnetica della corrente raggiunge il suo massimo; siccome le linee di forza si espandono dalla spira inducente verso l'esterno, esse sono - rispetto alla spira indotta in quiete - nella stessa relazione in cui si troverebbero se la spira indotta si fosse mossa nella direzione opposta attraverso di esse, cioè verso la spira inducente. Quindi la prima corrente indotta in questi casi era nella direzione opposta a quella della corrente principale (§17, §235). Interrompendo il contatto della batteria, si può pensare che le curve magnetiche (che sono mere espressioni per le forze magnetiche) si contraggano e ritornino verso la corrente che svanisce e, pertanto, si muovono attraverso la spira [indotta] nella direzione opposta, causando una corrente indotta opposta alla precedente [68, §238, p. 68].

¹²Al XXXIX Congresso dell'AIF (Milazzo, 2000), Guido Pegna ha presentato un semplice dispositivo sperimentale con il quale si possono facilmente riprodurre gli esperimenti disco - magnete effettuati da Faraday. Colgo l'occasione per ringraziare Guido Pegna per avermi donato un esemplare del suo dispositivo.

Il lettore avrà notato che in questo passo Faraday considera le linee di forza magnetica solo come *entità teoriche*, non dotate quindi di realtà fisica. Siamo infatti ancora negli anni trenta, mentre le riflessioni sull'esistenza fisica delle linee di forza sono successive di un ventennio.



Figura III.7. Un filo metallico, perpendicolare al piano del foglio, si muove con velocità \vec{v} in un campo magnetico uniforme di cui sono disegnate le linee di forza. La linea tratteggiata orizzontale indica la direzione perpendicolare alle linee di forza e θ è l'angolo tra il vettore velocità del filo e la direzione delle linee di forza.

La teoria dell'induzione elettromagnetica di Faraday è una teoria di campo. Infatti, la corrente indotta è dovuta all'interazione locale tra conduttore e linee di campo magnetiche. Quando un filo conduttore si muove nel campo magnetico prodotto da un magnete, esso interseca le linee di forza magnetiche e la corrente indotta è proporzionale alla velocità del filo (figura III.7):

Dai risultati relativi alla rotazione del filo e del magnete (§3097, §3106), è inoltre evidente che quando un filo si muove di moto uniforme tra linee uguali (cioè in un campo di uguale forza magnetica), la corrente di elettricità prodotta è proporzionale al tempo; inoltre [è proporzionale] alla velocità del moto. Essi provano inoltre, in generale, che la quantità di elettricità immessa in una corrente è proporzionale al numero delle linee intersecate [67, §3114 - 3115, p. 346].

Traducendo in formule la descrizione di Faraday, si ottiene $i \propto v$; allora $q = i\Delta t \propto N$ (*N* numero di linee intersecate). Inoltre, facendo riferimento alla figura III.7, è evidente che rileggendo i risultati di Faraday alla luce delle conoscenze successive, si perviene alla conclusione che il campo elettrico indotto nel filo in moto è dato da $E_i = \vec{v} \times \vec{B}$. Infatti, il campo elettrico indotto è proporzionale alle linee di forza intersecate in un secondo lungo

la direzione perpendicolare alle linee:

$$E_i \propto \nu \sin \theta$$
 (III.45)

dove θ è l'angolo formato dal vettore velocità del filo con le linee di forza. Indicando con *B* il parametro di proporzionalità:

$$E_i = Bv\sin\theta \tag{III.46}$$

si ottiene in conclusione:

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} \tag{III.47}$$

La forza elettromotrice indotta è data da ¹³:

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E}_i \cdot \vec{dl} = \oint \vec{(\vec{v} \times \vec{B})} \cdot \vec{dl}$$
(III.48)

Come vedremo più avanti (sezione III.6.3), questa equazione fornisce solo un termine della legge generale dell'induzione elettromagnetica, nel caso in cui il conduttore sia filiforme. Il termine mancante, dato da:

$$\oint -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl}$$
(III.49)

dove \vec{A} è il potenziale vettore, è sostituito nella teoria di Faraday dal moto delle linee di forza prodotte da un circuito in cui la corrente varia: quando la corrente cresce, le linee di forza si espandono verso l'esterno del circuito intersecando così il circuito indotto; quando la corrente diminuisce, le linee di forza ritornano verso il circuito inducente intersecando di nuovo il circuito indotto ma in direzione opposta.

III.6.2 Maxwell e l'induzione

Mi sono quasi interamente limitato alla trattazione matematica dell'argomento; ma vorrei raccomandare allo studente, dopo che ha appreso, sperimentalmente se possibile, quali sono i fenomeni osservabili, di leggere attentamente le Ricerche sperimentali di elettricità di Faraday. Egli vi troverà un resoconto fedele di alcune delle più grandi scoperte e ricerche elettriche, condotte in ordine e successione tali che ben difficilmente potrebbero essere migliorate se i risultati fossero noti in anticipo, e descritte nel linguaggio di un uomo che ha dedicato la più grande attenzione ai metodi per descrivere accuratamente le procedure scientifiche ed i loro risultati [13, p. XIII].

James Clerk Maxwell

¹³Naturalmente, questa formula, come le precedenti, non sono mai state scritte da Faraday. Esse sono il risultato della nostra traduzione matematica della fisica di Faraday.

Nella parte introduttiva e descrittiva del *Trattato* dedicata ai fenomeni di induzione elettromagnetica, Maxwell scrive:

L'insieme di questi fenomeni può essere sintetizzata in una legge. Quando varia il numero di linee di induzione magnetica che passano attraverso il circuito secondario nella direzione positiva, una forza elettromotrice agisce nel circuito ed è misurata dal tasso di diminuzione dell'induzione magnetica attraverso il circuito [52, §531, p. 179].

E:

Invece di parlare di numero di linee di forza magnetica, potremmo parlare dell'induzione magnetica attraverso il circuito, cioè dell'integrale di superficie dell'induzione magnetica esteso su qualsiasi superficie confinata dal circuito [52, § 541, p. 188 - 189].

Espressa matematicamente, questa legge si scrive:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{III.50}$$

dove Φ è il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito indotto. La (III.50) è la 'legge del flusso': Maxwell non la scrive formalmente in questo passaggio. La formula della 'legge del flusso' compare più avanti nel § 591 [52, p. 215].

Tuttavia, nel *Trattato* di Maxwell compare un paragrafo intitolato 'General equations of electromotive intensity' (Equazioni generali dell'intensità elettromotrice, cioè del campo elettrico) [52, § 598, p. 219]. In esso, Maxwell, studiando il caso dell'interazione tra due circuiti percorsi da corrente e supponendo che il circuito considerato 'indotto' sia in moto, perviene alla seguente formula per il campo elettrico in un punto generico del circuito indotto (scriviamo questa equazione in notazione moderna):

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$$
(III.51)

dove φ e \vec{A} sono i potenziali scalare e vettore. Maxwell, che scrive la (III.51) in termini delle componenti dei vettori, commenta:

Il termine contenente la nuova grandezza φ è stato introdotto per dare generalità all'espressione di \vec{E} . Questo termine scompare dall'integrale quando esteso all'intero circuito...L'intensità elettromotrice è stata già definita nell'art. 68. È anche chiamata l'intensità elettrica risultante, essendo la forza esercitata sull'unità di carica positiva posta in quel punto. Abbiamo ottenuto il valore più generale per questa grandezza nel caso di un corpo in moto in un campo magnetico dovuto a un circuito elettrico variabile. Se il corpo è un conduttore, la forza elettromotrice produrrà una corrente; se è un dielettrico, la forza elettromotrice produrrà solo uno spostamento elettrico. L'intensità elettromotrice, ovvero la forza su una particella, deve essere attentamente distinta dalla forza elettromotrice lungo un arco di una curva, l'ultima grandezza essendo l'integrale di linea della prima [52, § 598, p. 221].

E, più avanti:

L'intensità elettromotrice, data dall'equazione (III.51), dipende da tre circostanze. La prima di queste è il moto della particella attraverso il campo magnetico. La parte della forza dipendente da questo moto è espressa dal primo termine al secondo membro dell'equazione. Esso dipende dalla velocità della particella perpendicolare alle linee di induzione magnetica. [...] Il secondo termine nell'equazione (III.51) dipende dalla variazione temporale del campo magnetico. Questa può essere dovuta o alla variazione temporale della corrente elettrica nel circuito primario, o al moto del circuito primario. [...] L'ultimo termine è dovuto alla variazione della funzione φ nelle differenti parti del campo [52, § 598, p. 222].

Si osservi che Maxwell parla di 'velocità della particella'. In realtà, quella che compare nella sua deduzione è la velocità dell'elemento infinitesimo di circuito. D'altra parte, non possedendo un modello di corrente elettrica, Maxwell non era in grado di collegare la velocità dell'elemento di circuito a quella che chiamiamo velocità di deriva delle cariche elettriche in un conduttore. Alla fine, Maxwell aveva ragione nell'affermare che la velocità che compare nella (III.51) è la velocità della 'particella', perché, come mostrato in [70], nel caso di circuiti filiformi, il contributo della velocità di deriva della carica si annulla e la velocità di questa si riduce a quella dell'elemento di circuito che la contiene. Ma Maxwell non poteva sapere questo.

III.6.3 Legge generale dell'induzione elettromagnetica

Quando una concezione si diffonde all'interno di un collettivo di pensiero e lo permea abbastanza fortemente, fino a penetrare nella vita quotidiana e nelle locuzioni linguistiche, quando diventa un modo di vedere nel senso letterale del termine, una contraddizione sembra impensabile e inimmaginabile [71, p. 85].

Ludvik Fleck

Quindi, nel Trattato di Maxwell è contenuta una forma particolare di quella che in [70] è chiamata legge generale dell'induzione elettromagnetica. In [70], la forza elettromotrice indotta è definita come l'integrale su una linea chiusa della somma $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ che compare nell'espressione della forza di Lorentz¹⁴:

$$\mathscr{E} = \oint_{l} (\vec{E} + \vec{v}_{c} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$
(III.52)

dove \vec{v}_c è la velocità della carica. Ponendo:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
(III.53)

si ottiene immediatamente la forma integrale dell'equazione (III.51) di Maxwell:

$$\mathscr{E} = -\oint_{l} \frac{\partial \dot{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{v}_{c} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$
(III.54)

I due termini contenuti nella (III.54) rappresentano, rispettivamente, il contributo dovuto alla variazione temporale del potenziale vettore e quello dovuto al moto delle cariche nel campo magnetico. La (III.54) è una legge di campo: in essa, la forza elettromotrice indotta all'istante *t* appare come l'integrale di linea, allo stesso istante, del 'campo elettrico indotto' (l'intensità elettromotrice di Maxwell) calcolato, in ogni punto del circuito, all'istante *t*. Se si pone $\vec{v}_c = \vec{v}_l + \vec{v}_d$, dove \vec{v}_l è la velocità dell'elemento infinitesimo di circuito e \vec{v}_d è la velocità di deriva delle cariche ¹⁵, la (III.54) assume la forma:

$$\mathscr{E} = -\oint_{l} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{v}_{l} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{v}_{d} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$
(III.55)

¹⁵Si può usare qui la legge galileiana di composizione delle velocità perché $v_l \ll c \text{ e } v_d \ll c$.

¹⁴Già come studente, la legge del flusso mi metteva a disagio. Questo disagio crebbe quando, nei primi anni Novanta, incominciai a insegnare l'elettromagnetismo maxwelliano agli studenti del corso di laurea in matematica dell'Università di Pavia. Il seguente passo delle lezioni di Feynman mi suggerì la strada da seguire: «Dobbiamo guardare alla 'legge del flusso' in questo modo. In generale, la forza sulla carica unitaria è $\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$. In fili in moto c'è una forza derivante dal secondo termine. Inoltre, c'è un campo se, da qualche parte, c'è un campo magnetico che varia. Sono due effetti indipendenti, ma la forza elettromotrice lungo un filo chiuso è sempre uguale al tasso di variazione del flusso magnetico attraverso di esso [153, p. 17-1, 17-3].» Da qui, l'idea di definire la forza elettromotrice indotta in un circuito come l'integrale di linea della forza di Lorentz sulla carica unitaria positiva [72]. Solo successivamente mi chiesi: è possibile che Maxwell, che utilizzava ampiamente il potenziale vettore, non abbia scritto nulla di simile? Scoprii così che Maxwell era sostanzialmente arrivato alla stessa conclusione, partendo dallo studio dell'interazione elettromagnetica tra due circuiti elettrici [70].

Giuseppe Giuliani - Elettromagnetismo relatività quanti

La (III.55) mostra che anche la velocità di deriva delle cariche contribuisce, in generale, alla forza elettromotrice indotta: se il circuito è filiforme, il contributo della velocità di deriva alla forza elettromotrice si annulla perché \vec{v}_d è parallela a \vec{dl} ; se il circuito indotto è un conduttore esteso, il contributo della velocità di deriva alla forza elettromotrice è, in generale, diverso da zero (appendice C.2). In [70] sono sviluppate tutte le implicazioni di questa definizione di forza elettromotrice. In particolare, si dimostra che la (III.55), espressa in funzione del campo magnetico, assume la forma:

$$\mathscr{E} = \left[-\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS + - \oint_{l} (\vec{v}_{l} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \right] + \left\{ \oint_{l} (\vec{v}_{l} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{v}_{d} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \right\}$$
(III.56)

dove sono stati racchiusi tra parentesi quadre e graffe i termini che derivano, rispettivamente, dal primo e dal secondo termine del secondo membro della (III.54).

Se si applica questa equazione al caso di un circuito conduttore filiforme, si ottiene immediatamente (ricordando che in questo caso il contributo della velocità di deriva si annulla):

$$\mathscr{E} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS \tag{III.57}$$

dove la superficie *S* è una *qualunque* superficie che abbia il circuito filiforme come contorno. La (III.57) è la cosiddetta 'legge del flusso'. Usualmente, questa è considerata la 'legge' dell'induzione elettromagnetica. In realtà, essa è solo una regola di calcolo che non sempre conduce al risultato corretto. La (III.57) connette il valore della $\mathscr E$ indotta nel circuito all'istante *t* alla variazione temporale del flusso del campo magnetico attraverso una superfice *arbitraria* che abbia il circuito come contorno: la variazione del flusso è calcolata *allo stesso istante t*. Pertanto, non è possibile stabilire alcuna connessione causale tra il secondo ed il primo membro della (III.57) perché questa connessione causale presupporrebbe una velocità di propagazione delle interazioni fisiche con velocità infinita. Inoltre, siccome la superficie di integrazione è arbitraria (purché sia delimitata dal circuito filiforme), avremmo infinite cause dello stesso effetto.

Nei manuali, la regola del flusso (III.57) è usualmente ricavata nel modo seguente. Si considera una linea chiusa lungo la quale calcolare la circuitazione del campo elettrico, denotata come forza elettromotrice:

$$\mathscr{E} = \oint_{l} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_{S} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \hat{n} dS \quad \text{(III.58)}$$

dove si è utilizzata la seconda equazione di Maxwell (III.1b) e dove l'ultimo passaggio è possibile solo se la linea di integrazione non varia nel tempo. Nei manuali, la regola del flusso è interpretata causalmente perché è interpretata causalmente la seconda equazione di Maxwell. A pagina 74, abbiamo mostrato come questa interpretazione causale non sia possibile.

André Blondel ha eseguito nel 1914 un esperimento che dimostra come non sia possibile stabilire una connessione causale tra variazione del flusso del campo magnetico e forza elettromotrice indotta [73]. Per i dettagli dell'esperimento si veda [74]. Blondel ha dimostrato che la forza elettromotrice indotta in un solenoide posto in un campo magnetico statico parallelo al suo asse è nulla se il numero delle spire del solenoide diminuisce nel tempo (facendo ruotare il cilindro su cui è avvolto il solenoide), mentre la regola del flusso (III.57) prevederebbe che:

$$\mathscr{E} = -\phi_B \frac{dN}{dt} \tag{III.59}$$

dove ϕ_B è il flusso del campo magnetico attraverso una spira e *N* il numero delle spire. La legge generale dell'induzione (III.54) conduce invece alla predizione corretta: siccome il potenziale vettore non dipende dal tempo, il primo termine della (III.54) è nullo, mentre il secondo termine è nullo purché il filo del solenoide sia srotolato in modo appropriato (mantenendolo tangente al cilindro su cui è avvolto). L'esperimento di Blondel può essere confrontato con il caso della spira rotante in un campo magnetico statico (figura III.8).

In entrambi i casi un conduttore filiforme ruota in un campo magnetico statico ed in entrambi i casi il flusso del campo magnetico attraverso il conduttore varia nel tempo: ma una forza elettromotrice viene prodotta solo nel caso della spira. Quindi, la regola del flusso predice il risultato corretto solo nel caso della spira. Come è facile verificare con la legge generale dell'induzione elettromagnetica, la forza elettromotrice prodotta nel caso della spira è dovuta al moto delle cariche nel campo magnetico statico. Questo confronto conferma che la regola del flusso è solo una regola di calcolo che non sempre conduce al risultato corretto (Blondel), e che, come nel caso della



Figura III.8. Una spira rettangolare ruota uniformemente con velocità angolare Ω intorno all'asse *ab* in un campo magnetico statico \vec{B} perpendicolare al piano della figura ed entrante. Nella spira è prodotta una forza elettromotrice data da $BS\Omega\sin\Omega t$ dove S è l'area della spira. Il lettore riconoscerà in questo esperimento il principio di funzionamento degli alternatori.

spira, oscura l'origine fisica del fenomeno: la forza elettromotrice prodotta nella spira non è dovuta alla variazione del flusso del campo magnetico, ma al moto delle cariche nel campo magnetico.

Il fatto che la legge generale dell'induzione elettromagnetica (III.54), sostanzialmente ricavata da Maxwell, sia stata poi rapidamente dimenticata costituisce un intrigante caso storico che, a quanto mi risulta, non è stato studiato. Possiamo solo avanzare alcune ipotesi. Innanzitutto il fatto che Maxwell, dopo aver ricavato la (III.54), non abbia discusso la relazione tra legge generale dell'induzione e legge del flusso e non abbia posto in evidenza che quest'ultima è solo una regola di calcolo ha certamente contribuito all'oblio. Anche la presenza nella (III.54) del potenziale vettore può avere svolto un ruolo, dopo che Heaviside e Hertz lo hanno espunto dalla presentazione dell'elettromagnetismo verso la fine dell'Ottocento ¹⁶. Dopo il lavoro di Blondel (1914) bisogna aspettare gli anni Sessanta per vedere riaperta la discussione sulla regola del flusso. Si vedano innanzitutto le riflessioni di Feynman [153, p. 17 - 1, 17 - 3]; e, per una discussione di altri casi di confronto tra legge generale e regola del flusso, si veda [72].

Il confronto tra le predizioni della legge generale dell'induzione elettromagnetica e la regola del flusso è particolarmente interessante nel caso dell'effetto Maxwell-Lodge (figura III.9).

Sia la legge generale dell'induzione elettromagnetica sia la regola del flus-

¹⁶Intorno al 1910, la validità della legge del flusso è stata oggetto di una vivace discussione tra gli ingegneri elettrici della American Institute of Electrical Engineers; si veda il lavoro di Carl Hering [75].


Figura III.9. *S* è un lungo solenoide percorso da una corrente alternata a bassa frequenza. Nell'anello conduttore *A* è indotta una forza elettromotrice alternata e, quindi, una corrente alternata.

so predicono lo stesso valore della forza elettromotrice indotta nell'anello nel caso ideale in cui il solenoide è infinitamente lungo. In questo caso, il campo magnetico all'esterno del solenoide è nullo. Per la legge generale dell'induzione (III.54) si ha:

$$\mathscr{E} = -\oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$
(III.60)

Siccome abbiamo mostrato che la variazione del flusso del campo magnetico non è la causa di alcunché, l'effetto Maxwell-Lodge deve essere interpretato sulla base della variazione temporale del potenziale vettore. Una recente discussione dell'effetto corredata da dati sperimentali si trova in [76].

III.6.4 Einstein e l'induzione

Nell'introduzione dell'articolo del 1905 che ha dato origine alla teoria della relatività speciale, Einstein scrive:

È noto che l'elettrodinamica di Maxwell - come la si interpreta attualmente - nella sua applicazione ai corpi in movimento porta a delle asimmetrie, che non paiono essere inerenti ai fenomeni. Si pensi per esempio all'interazione elettromagnetica tra un magnete e un conduttore. I fenomeni osservabili in questo caso dipendono soltanto dal moto relativo del conduttore e del magnete, mentre secondo l'interpretazione consueta i due casi, a seconda che l'uno o l'altro di questi corpi sia quello in moto, vanno tenuti rigorosamente distinti. Se infatti il magnete è in moto e il conduttore è a riposo, nei dintorni del magnete esiste un campo elettrico con un certo valore dell'energia, che genera una corrente nei posti dove si trovano parti del conduttore. Ma se il magnete è in quiete e si muove il conduttore, nei dintorni del magnete non esiste alcun campo elettrico, e si ha invece nel conduttore una forza elettromotrice, alla quale non corrisponde nessuna energia, ma che - a parità di moto relativo nei due casi considerati - dà luogo a correnti elettriche della stessa intensità e dello stesso andamento di quelle alle quali dà luogo nel primo caso la forza elettrica [27, trad. it. p. 1].

Einstein considera il caso in cui, nel sistema di riferimento del laboratorio, si muova il magnete oppure il circuito.



Figura III.10. Il magnete M vede il circuito filiforme e rigido C muoversi con velocità $v_{CM} = v$ lungo la direzione positiva dell'asse *x*.

Nel sistema di riferimento del magnete, che vede il circuito muoversi con velocità V_{CM} lungo il proprio asse x, la forza elettromotrice indotta è data dall'equazione:

$$\mathcal{E} = \oint_{l} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{V}_{CM} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} =$$

$$= -\oint_{l} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{V}_{CM} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$
(III.61)

Abbiamo usato la legge generale dell'induzione (III.54), applicata al caso di circuiti filiformi (il contributo della velocità di deriva delle cariche elettriche è nullo). Siccome il potenziale vettore generato dal magnete non dipende dal tempo, l'equazione precedente assume la forma semplice:

$$\mathscr{E} = \oint_{l} (\vec{V}_{CM} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$
(III.62)

che, essendo $\vec{V}_{CM} \times \vec{B}$ perpendicolare all'asse *x*, diventa:

$$\mathscr{E} = \oint_{l} \left[(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_{y} dy + (\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_{z} dz \right]$$
(III.63)

Poiché la forma delle equazioni deve essere la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale, nel sistema di riferimento del circuito, si ha:

$$\mathscr{E}' = \oint_{l'} \vec{E}' \cdot \vec{dl}' + \oint_{l'} (\vec{V}_{CC} \times \vec{B}') \cdot \vec{dl}'$$
(III.64)

dove con $\vec{V}_{CC} = 0$ è stata indicata la velocità del circuito rispetto a sé stesso. Quindi:

$$\mathscr{E}' = \oint_{l'} \left(E'_{x} dx' + E'_{y} dy' + E'_{z} dz' \right)$$
(III.65)

Essendo, per le equazione di trasformazione dei campi:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x = 0\\ E'_y &= \Gamma(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_y\\ E'_z &= \Gamma(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_z \end{aligned}$$

e, per le trasformazioni di Lorentz:

$$dy' = dy$$
$$dz' = dz$$

si ottiene:

$$\mathcal{E}' = \Gamma \oint_{l} \left[(\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_{y} dy + (\vec{V}_{CM} \times \vec{B})_{z} dz \right] = \Gamma \mathcal{E}$$
(III.66)

Abbiamo così dimostrato che il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, coinvolgendo campi elettrici e magnetici, deve essere trattato relativisticamente, come sostenuto da Einstein¹⁷. Nella parte del lavoro dedicata alle equazioni di trasformazione dei campi elettrico e magnetico, Einstein commenta:

È inoltre chiaro che l'asimmetria menzionata nell'Introduzione riguardo alla trattazione della corrente generata mediante il moto relativo di un magnete e di un conduttore sparisce. Anche le questioni relative alla "sede" della forza elettromotrice elettrodinamica (macchine unipolari) sono infondate [27, trad. it. p. 14]¹⁸.

Questa conclusione, insieme al passo einsteiniano citato a pagina 92, deve essere interpretata correttamente. Il punto centrale è che il fenomeno del moto relativo tra un magnete e un conduttore deve essere trattato relativisticamente. La trattazione relativistica del moto relativo tra magnete e circuito conduttore ha mostrato che:

¹⁷Si noti che, essendo la velocità relativa *v* ≪ *c*, possiamo porre Γ = 1 perché la differenza tra il valore predetto per Γ è l'unità non è sperimentalmente rilevabile. Per esempio: per avere un valore di Γ superiore di un milionesimo rispetto ad uno, la velocità relativa tra magnete e circuito dovrebbe essere pari a ≈ $1.4 \times 10^{-3} c$.

¹⁸La questione della localizzazione della forza elettromotrice è trattata nell'appendice C.1. In questa appendice si dimostra che la sede della forza elettromotrice indotta ha significato fisico e può essere sperimentalmente rivelata.

1. Nel SRI del magnete, la forza elettromotrice indotta è dovuta al moto delle cariche elettriche nel campo magnetico, cioè ad un termine del tipo:

$$\oint (\vec{v}_{carica} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$
(III.67)

2. Nel SRI del conduttore, la forza elettromotrice indotta è invece connessa alla variazione temporale del potenziale vettore, cioè ad un termine del tipo:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{d}l = -\oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{d}l \qquad (\text{III.68})$$

Ritroviamo cioè, in termini matematici, la dicotomia denunciata da Einstein nell'incipit del suo lavoro sulla relatività speciale. Con una differenza fondamentale: le cause della forza elettromotrice indotta non sono diverse nei due SRI, ma in ognuno dei due SRI agisce solo una delle due cause della forza elettromotrice. Ciò significa che per dare coerenza interna alle asserzioni di Einstein è necessario usare la legge generale dell'induzione elettromagnetica.

Nel caso del moto relativo tra un magnete ed un circuito rigido c'è una sola sorgente: il magnete. Nell'elettromagnetismo maxwelliano, le proprietà di un magnete sono espresse in termini di correnti (correnti di Ampère). Si costruisce cioè un *modello* di magnete in cui sono attive spire di corrente piane descritte dal vettore \vec{J}_m aventi le dimensioni di una corrente per unità di superficie. Queste spire di corrente, sulla superficie del magnete, sono descritte dal vettore \vec{J}_S aventi le dimensioni di una corrente per unità di lunghezza. La proprietà macroscopica che caratterizza un magnete è il momento di dipolo magnetico per unità di volume \vec{M} . Questo vettore è legato alle correnti di Ampère dalle relazioni:

$$\vec{J}_M = \operatorname{rot} \vec{M} \qquad \vec{J}_S = \vec{M} \times \hat{n}$$
 (III.69)

dove \hat{n} è il versore normale uscente della superficie elementare del magnete [29, p. 257-259]. Se il magnete è omogeneo, \vec{J}_M è nullo ed il magnete è equivalente, per quanto riguarda il campo magnetico prodotto, ad un solenoide in cui circola una corrente con densità lineare uguale a J_S . Il potenziale vettore generato da un magnete è quindi espresso il funzione di \vec{M} , legato alle correnti di Ampère dalle (III.69). Nel caso del magnete e del circuito, la causa della forza elettromotrice indotta nel circuito è il moto relativo tra i due. Questa causa si manifesta matematicamente nel termine (III.67) nel SRI del magnete e nel termine (III.68) nel SRI del circuito: entrambi i termini sono presenti nella legge generale dell'induzione elettromagnetica (III.54).

III.6.5 Il disco di Faraday e la relatività del moto

La nave da cui siamo trasportati si muove, mentre sembra star ferma; quella che rimane immobile all'ormeggio, si crede che proceda oltre. E sembra che a poppa fuggano colline e pianure oltre le quali conduciamo la nave e con le vele voliamo [23, libro IV, 387 - 390].

Lucrezio



Figura III.11. Disco di Faraday. Un disco conduttore ruota intorno al proprio asse con velocità angolare costante Ω in un campo magnetico \vec{B} uniforme, perpendicolare al piano del disco; la freccia sul telaio indica il senso di percorrenza della linea chiusa scelto per il calcolo della forza elettromotrice.

Verifichiamo come la legge generale dell'induzione descriva gli esperimenti effettuati da Faraday con il disco conduttore (figura III.11).

Nel sistema di riferimento del laboratorio, si considera la linea chiusa costituita dal telaio e dal raggio *CD* del disco e si analizzano i contributi dei termini che appaiono nella legge generale dell'induzione (III.55). Il primo termine è nullo perché il potenziale vettore non dipende dal tempo, mentre il secondo termine fornisce un contributo alla forza elettromotrice – calcolata nel senso indicato in figura – dato da:

$$\mathscr{E} = \int_0^R \Omega r B dr = \frac{1}{2} \Omega B R^2 \tag{III.70}$$

Si è trascurato il contributo della velocità di deriva ¹⁹. Nel circuito *ABCD* circola quindi una corrente diretta nello stesso senso lungo il quale è stata

¹⁹Il contributo della velocità di deriva produce, se la disposizione sperimentale mantiene la simmetria circolare, una corrente circolare nel disco. Ciò comporta un aumento della resistenza radiale del disco (magnetoresistenza): si veda l'appendice C.3.

calcolata la forza elettromotrice. Se invece si fa ruotare il magnete (non mostrato in figura), anche il secondo termine della (III.55), contenente il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{B}$ è nullo e, quindi è nulla la forza elettromotrice indotta nel disco. Infine, si osservi come, ruotando il magnete, il campo magnetico in cui è immerso il disco non cambia.

Gli esperimenti di Faraday con il disco conduttore e il magnete cilindrico (pagina 82) mostrano che, nel sistema di riferimento del laboratorio, far ruotare il disco o far ruotare il magnete produce risultati diversi: se ruota il disco c'è corrente indotta nel disco; se ruota il magnete non c'è corrente indotta. D'altra parte, nella sezione III.6.4, abbiamo visto che, nel caso della traslazione rettilinea uniforme, muovere il magnete o muovere il circuito produce lo stesso risultato: c'è, in entrambi i casi, una forza elettromotrice indotta nel circuito. Questo punto richiede qualche precisazione.

Nel capitolo dedicato al tempo (capitolo II), abbiamo già avuto occasione di riflettere sul significato dell'asserzione 'il moto è relativo'. Innanzitutto, c'è un significato immediato e ovvio di questa asserzione: per asserire che un oggetto è in moto è necessario specificare rispetto a quale sistema di riferimento. In secondo luogo, l'asserzione potrebbe implicare che il rapporto dei valori delle misure di una grandezza fisica effettuate nei due SRI dipende solo dalla loro velocità relativa V. Abbiamo visto che ciò è vero quando uno dei due SRI informa l'altro, mediante segnali luminosi, della durata di un fenomeno che si svolge in un punto del suo sistema di riferimento vicino (coincidente con) a quello in cui si trova il suo orologio. È il fenomeno della dilatazione del tempo, studiato nella sezione II.3.2 e nella appendice A.1. Questo fenomeno è perfettamente simmetrico perché dipende dal fattore relativistico $\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Abbiamo trovato un risultato analogo nel caso del moto relativo uniforme tra un magnete e un circuito rigido: i valori della forza elettromotrice nei due sistemi di riferimento sono correlati attraverso il fattore Γ (equazione (III.66)). Nel sistema di riferimento del magnete, la forza elettromotrice indotta è dovuta al termine contenente $\vec{v} \times \vec{B}$, cioè al moto del conduttore nel campo magnetico; invece, nel sistema di riferimento del circuito, la forza elettromotrice indotta è dovuta al termine contenente $-\partial \vec{A}/\partial t$, cioè alla variazione temporale del potenziale vettore prodotta dal moto relativo. Nel sistema di riferimento del magnete opera il campo magnetico (attraverso il termine $\vec{v} \times \vec{B}$); nel sistema di riferimento del circuito opera il campo elettrico $-\partial \vec{A}/\partial t$. Ci sono tuttavia fenomeni che non dipendono solo dalla velocità relativa tra i due sistemi di riferimento. Uno di questi è l'effetto viaggio, studiato nelle sezioni II.3.3 e II.3.5. Un fenomeno analogo è quello del disco di Faraday. Nel caso dell'effetto viaggio, che risolve il paradosso degli orologi tradizionale, c'è una asimmetria tra i due orologi, perché solo uno dei due compie il viaggio: solo uno dei due vede Roma e Parigi, mentre l'altro vede solo Roma; oppure, solo uno dei due subisce delle accelerazioni (che possono essere misurate da un accelerometro solidale con l'orologio). Nel caso del moto relativo rettilineo tra magnete e circuito, il termine $\vec{v} \times \vec{B}$ opera nel SRI del magnete, mentre il termine $-\partial \vec{A}/\partial t$ opera in quello del circuito. Nel disco di Faraday, compare una asimmetria dovuta al fatto che quando ruota il disco opera il termine $\vec{v} \times \vec{B}$, mentre è nullo il termine $-\partial \vec{A}/\partial t$; invece, quando ruota il magnete, sono nulli entrambi i termini.

III.6.6 Considerazioni finali

Lo studio dell'induzione elettromagnetica ha posto in evidenza la complessità del fenomeno e la necessità dell'uso della natura relativistica dell'elettromagnetismo maxwelliano per descriverlo compiutamente. Le ricerche sperimentali di Faraday hanno portato alla luce quasi tutte le caratteristiche osservabili del fenomeno. La sua teoria delle linee di forza magnetiche permette di descrivere qualitativamente (e, in parte, anche quantitativamente) tutti i fenomeni osservati. La legge generale dell'induzione di Maxwell, rivista alla luce della natura discreta della carica elettrica, descrive anche i fenomeni osservati nel disco di Corbino, fenomeni originariamente al di fuori dell'orizzonte concettuale dell'induzione elettromagnetica e del campo di applicazione delle sue leggi (appendice C.2).

La persistenza della regola del flusso, erroneamente ritenuta come la 'legge dell'induzione elettromagnetica', costituisce un caso di interesse storico, epistemologico e didattico. Storico ed epistemologico, perché verosimilmente legato alla rilevanza attribuita ai potenziali nella teoria elettromagnetica; didattico, perché costituisce una sfida per una presentazione dell'induzione elettromagnetica concettualmente rigorosa [79] anche a livello della scuola secondaria superiore [80]. Nell'appendice C si trovano ulteriori esempi, concettualmente rilevanti, della legge generale dell'induzione elettromagnetica.

Abbiamo già visto come la condizione di individuare le connessioni causali nei fenomeni descritti dalle teorie – condizione necessaria per la loro interpretazione – possa essere soddisfatta nel caso dell'elettromagnetismo. La presentazione dell'elettromagnetismo in funzione dei potenziali – scalare e vettore – è la più completa e trasparente: più completa perchè permette di scrivere una legge generale e locale dell'induzione elettromagnetica; più trasparente perchè le sue equazioni appaiono invarianti per trasformazioni di Lorentz a vista. Inoltre, mentre la descrizione in funzione dei potenziali pone sullo stesso piano le sorgenti dei campi – cariche e correnti – introducendo i relativi potenziali – scalare e vettore, la descrizione in funzione dei campi privilegia il potenziale scalare e riserva al potenziale vettore solo un ruolo marginale. Quest'ultima differenza si riflette anche nella indicazione delle grandezze fisiche da sottoporre a misura: il potenziale vettore o la sua derivata temporale sono grandezze fisiche considerate misurabili solo nella descrizione che utilizza i potenziali. Esemplari sono, a questo proposito, il caso dell'induzione elettromagnetica e la descrizione teorica della misura del campo elettrico di un'onda luminosa (sezione III.3).

Capitolo IV

La luce

La natura della luce è un argomento che non ha alcuna importante rilevanza per le faccende della vita o per la pratica delle arti, ma è per molti altri versi estremamente interessante, specialmente perché aiuta a sostenere le nostre idee sulla natura delle nostre sensazioni e, in generale, sulla struttura dell'universo^a. [81, p. 457]

Thomas Young

IV.1 Da Young a Maxwell: cronologia essenziale

Nel corso della storia, si sono a lungo confrontate due descrizioni della luce: quella corpuscolare e quella ondulatoria. La situazione, agli inizi dell'Ottocento, era stata efficacemente descritta da Thomas Young:

È accettato da tutti che la luce consiste, o nell'emissione da una sostanza luminosa di particelle molto minute, che sono effettivamente emesse e continuano a muoversi con la velocità comunemente attribuita alla luce, o nell'eccitazione di un moto ondulatorio, analogo a quello che caratterizza il suono, in un mezzo altamente leggero ed elastico che pervade l'universo; tuttavia i giudizi dei filosofi di ogni epoca

^{*a*}A distanza di due secoli, questo passo di Young conserva la sua validità per quanto riguarda la nostra concezione della natura della luce e della struttura dell'universo. Tuttavia, non è oggi più vero che la natura della luce non abbia rilevanza 'per le faccende della vita o per la pratica delle arti': basti pensare allo sviluppo, imprevedibile due secoli fa, dei dispositivi che generano luce o la rivelano.

sono stati largamente divisi sulla preferenza dell'una o dell'altra opinione.

Ci sono anche alcune circostanze che hanno indotto coloro i quali sono in favore della prima ipotesi, a credere, come Newton, che l'emissione delle particelle di luce sia sempre accompagnata dalla presenza di onde nell'Etere che seguono le particelle nel loro percorso, oppure a supporre, come Boscovich, che alle stesse particelle luminose vengano impartiti, al momento della loro emissione, certi moti rotatori e vibrazionali che sono mantenuti per tutta la durata del loro moto. Queste supposizioni aggiuntive, per quanto necessarie a spiegare alcuni particolari fenomeni, non sono mai state pienamente comprese o riconosciute, sebbene non sia stato fatto alcun tentativo per conciliare in qualche altro modo la teoria con quei fenomeni [81, p. 457].

Il 24 novembre 1803, Young tenne una lezione alla Royal Society intitolata *Esperimenti e calcoli relativi all'ottica fisica*. Scrive Young:

L'affermazione su cui intendo insistere è semplicemente che le frange di colore sono prodotte dall'interferenza di due porzioni di luce; e penso non verrà negato anche dal più prevenuto che [questa] affermazione è provata dagli esperimenti sui quali riferirò; *esperimenti che possono essere ripetuti con grande facilità, quando il sole risplende e senza alcun altro apparato che non sia a disposizione di chiunque* [82, p. 1; corsivo mio].

Il primo esperimento è una versione 'primitiva' dell'esperimento delle due fenditure (pagina 167):

Nell'imposta di una finestra ho fatto un piccolo foro e l'ho ricoperto con uno spesso foglio di carta perforato con un piccolo ago. Per facilitare l'osservazione, ho posizionato, senza l'imposta della finestra, un piccolo specchio in modo tale da riflettere la luce del sole in una direzione quasi orizzontale, sulla parete opposta, e di far passare il cono della luce divergente su un tavolo, su cui erano posti diversi piccoli schermi di cartoncino. Ho collocato nel fascio di luce un cartoncino, il cui spessore era di circa un trentesimo di pollice e ho osservato la sua ombra sulla parete o su altri cartoncini posti a distanze diverse. Oltre alle frange colorate da entrambe le parti dell'ombra, l'ombra medesima era divisa da frange simili parallele, di minori dimensioni, in numero diverso a seconda della distanza di osservazione dell'ombra, ma con il centro dell'ombra sempre bianco [82, p. 2].

Due aspetti devono essere sottolineati. Innanzitutto, il fatto, esplicitamente richiamato da Young, che l'esperimento da lui svolto può essere ripetuto

Giuseppe Giuliani - Elettromagnetismo relatività quanti

da chiunque. Ciò è vero anche ai nostri giorni, anche se oggi useremmo come sorgente di luce un laser, con indubbi vantaggi pratici per quanto riguarda l'allestimento dell'esperimento e la semplificazione dell'immagine prodotta, dovuta all'uso di una sorgente monocromatica (figura IV.1).



Figura IV.1. Esperimento di interferenza 'alla Young'. Sorgente: laser elio - neon; spessore cartoncino: 0.5 mm.

In secondo luogo, il fatto che Young ha usato, per suddividere il fascio di luce in due, un cartoncino disposto parallelamente al fascio di luce incidente. Ciò ci rammenta che Francesco Maria Grimaldi, nell'esperimento in cui osservò per la prima volta il fenomeno della diffrazione della luce, usò un allestimento simile a quello di Young: nell'esperimento di Grimaldi, però, 'il corpo opaco' era disposto perpendicolarmente al fascio di luce [83, p. 2]. Quindi è sufficiente ruotare di novanta gradi il cartoncino per passare da un fenomeno di diffrazione ad uno di interferenza.

Nel 1808 Étienne Louis Malus scopre che i raggi riflessi da una superficie d'acqua secondo un angolo di 52º 45' hanno una proprietà simile a quella dei raggi che, dopo aver attraversato una lamina di calcite, attraversano una seconda lamina di calcite: per un'opportuna rotazione di quest'ultima lamina intorno all'asse individuato dalla direzione dei raggi incidenti, si ha un solo raggio rifratto, invece dei due raggi rifratti prodotti da luce 'normale'. Malus chiama questa proprietà *polarizzazione*. Qualche anno dopo (1816) Dominique Francois Jean Arago comunica a Young che, insieme a Fresnel, ha osservato che due raggi di luce i cui piani di polarizzazione siano perpendicolari, non interferiscono come raggi di luce ordinari, ma, se ricombinati, danno origine alla medesima intensità luminosa, indipendentemente dalla differenza tra le distanze da loro percorse. A partire dagli anni Venti Augustin Jean Fresnel sviluppa una teoria ondulatoria della luce basata su onde trasversali¹. Per far questo è necessario supporre che il fluido (Etere) possegga una rigidità sufficiente da permettere, come in un solido, vibrazioni trasversali. Questa caratteristica dell'Etere costituirà il punto debole delle teorie ondulatorie della luce dell'Ottocento e non sarà mai eliminato. Come sappiamo, il problema fu drasticamente risolto da Einstein nel 1905, elimi-

¹Gli scritti di Fresnel sono stati raccolti in tre volumi, disponibili in rete [84].

nando il concetto di Etere. All'attività di Fresnel come sperimentatore, sono dovute due importanti innovazioni. La prima riguarda un esperimento di interferenza in cui le due fenditure sono sostituite da due specchi riflettenti che suddividono la luce proveniente dalla sorgente; la seconda, l'uso di quello che verrà poi chiamato 'biprisma di Fresnel'. Questo prisma è costituito da due prismi affacciati aventi un piccolo angolo di rifrangenza. Il fascio incidente viene suddiviso in due fasci che si sovrappongono in una regione centrata intorno all'asse di simmetria del biprisma: i due fasci sembrano provenire da due sorgenti virtuali collocate dalla parte della sorgente. Il biprisma di Fresnel è stato usato in molti esperimenti di interferenza [85, 86], incluso l'esperimento di interferenza a fotone singolo discusso nella sezione IV.9.5. Un dispositivo elettrico che svolge una funzione analoga a quella del biprisma di Fresnel è stato usato in esperimenti di interferenza di elettroni [87, p. 183].

Nel 1873, Maxwell pone il sigillo sulla teoria ondulatoria della luce, descrivendo la luce come un'onda elettromagnetica trasversale [52, cap. XX]. Nel 1887, Hertz produce in laboratorio i fenomeni descritte dalle onde elettromagnetiche di Maxwell [11, p. 29].

IV.2 La radiazione di corpo nero

Se E è considerata come una quantità divisibile in modo continuo, questa distribuzione è possibile in un numero infinito di modi. Tuttavia, noi supponiamo - questo è il punto essenziale di tutto il procedimento - che sia composta da un numero ben definito di parti uguali ed useremo d'ora innanzi la costante della natura $h = 6.55 \times 10^{-27}$ erg sec. Questa costante, moltiplicata per la frequenza v dei risonatori ci dà l'elemento di energia ε e, dividendo E per ε otteniamo il numero P degli elementi di energia che debbono essere suddivisi tra gli N risonatori. Se il rapporto non è un intero, prendiamo per P un intero vicino [88, trad. ingl. p. 40].

Max Planck

Lo spazio delle fasi di un quanto di luce relativo ad un certo volume viene diviso in 'celle' di dimensione uguale a h^3 . Il numero delle possibili ripartizioni su queste celle dei quanti di luce di una radiazione definita macroscopicamente fornisce l'entropia e quindi tutte le proprietà termodinamiche della radiazione [89, trad. it. p. 1].

Satyendra Nath Bose

Tuttavia, agli inizi del Novecento, il quadro incomincia a mutare di nuovo. Il 14 dicembre del 1900 [88], Max Planck presenta ad una riunione della Società Tedesca di Fisica una comunicazione in cui la formula che fornisce l'energia della radiazione di corpo nero per unità di volume e di frequenza contiene la costante *h*, poi detta di Planck, e la costante k_B di Boltzmann (così denominata da Planck, senza il suffisso *B*)²:

$$u(v,T) = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{hv}{e^{hv/k_B T} - 1}$$
 (IV.1)

La storia del corpo nero inizia intorno al 1860 quando Gustav Kirchhoff definisce che cosa si intende per corpo nero e formula alcune leggi generali sulle sue proprietà [91, p. 2 - 7]. La sollecitazione allo studio della connessione tra emissione ed assorbimento di radiazioni da parte di un corpo venne a Kirchhoff dall'indagine sulle righe nere osservate da Joseph von Fraunhofer nello spettro solare. Kirchhoff avanzò l'ipotesi secondo cui un corpo è in grado di assorbire le radiazioni che emette dando così una spiegazione delle righe nere osservate da Fraunhofer e permettendo di trarre alcune conclusioni sulla composizione dell'atmosfera solare. Kirchhoff dimostrò poi che «ad una determinata temperatura e per una determinata lunghezza d'onda, il rapporto tra il potere emissivo e quello d'assorbimento è lo stesso per tutti i corpi.» Indicato con e il potere emissivo e con a quello d'assorbimento possiamo esprimere la legge di Kirchoff scrivendo che:

$$\frac{e(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T)$$
(IV.2)

 $f(\lambda, T)$ é quindi una *funzione universale*, non dipendendo dalla natura del corpo preso in considerazione. Kirchhoff riteneva che la formulazione esplicita di questa legge non avrebbe incontrato grosse difficoltà perché «...tutte le funzioni indipendenti dalla natura dei corpi sinora incontrate hanno una forma semplice.» Questo auspicio venne eluso dagli sviluppi successivi. La ricerca della forma della funzione universale non risultò semplice: ci vollero quarant'anni circa per ot-

²La letteratura riguardante lo sviluppo storico dello studio della radiazione di corpo nero e la successiva nascita della fisica dei quanti è assai vasta. Oltre ad alcuni contributi che saranno citati nel seguito, non si può non segnalare la vasta opera di Jagdish Mehra e Helmut Rechenberg *The Historical Development of Quantum Theory* [90] e il volume di Max Jammer *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* [91]. Thomas Kuhn ha dedicato un pregevole libro alla fisica della radiazione di corpo nero a cavallo tra Ottocento e Novecento [92]. Infine, il libro di Malcolm Longair *Quantum Concepts in Physics* ripercorre il primo trentennio del Novecento con il pregio di sviluppare interamente, quando necessario, i calcoli dei lavori originali che, sovente, non sono facilmente reperibili [93].

tenerne l'espressione e più di sessanta per trovarne una deduzione rigorosa.

Kirchoff definì corpo nero perfetto, o più brevemente, corpo nero come quello che assorbe tutta la radiazione incidente, qualunque sia la sua lunghezza d'onda. Essendo quindi uguale ad uno il potere d'assorbimento del corpo nero, il suo potere emissivo coincide con la funzione universale definita dall'equazione (IV.2). Kirchoff mostrò poi, con considerazioni termodinamiche, che, all'equilibrio, la radiazione contenuta in una cavità le cui pareti siano impermeabili alla radiazione è della stessa «qualità ed intensità» di quella di un corpo nero alla stessa temperatura. Questa conclusione contiene implicitamente l'idea che per realizzare in laboratorio un corpo nero si debba usare una cavità isoterma con un piccolo foro: il fascio di radiazione uscente è un campione della radiazione della cavità. Tuttavia, l'idea che cavità isotermiche potessero essere usate per lo studio della radiazione di corpo nero fu espressa esplicitamente solo nel 1884 da Christiansen e la prima cavità costruita ed utilizzata a questo scopo fu quella di Lummer e Wien (1895).

La più accurata misura della radiazione di corpo nero è quella ottenuta usando come sorgente la radiazione cosmica di fondo al di fuori dell'atmosfera terrestre (sezione IV.2.5): la radiazione cosmica di fondo è una radiazione di corpo nero corrispondente a 2.725 K.

La formula di Planck (IV.1), per $hv \gg k_B T$, assume la forma

$$u(v,T) \approx \frac{8\pi v^2}{c^3} h v e^{-hv/k_B T}$$
(IV.3)

detta di Wien [106], mentre per $hv \ll k_B T$ assume la forma

$$u(v,T) \approx \frac{8\pi v^2}{c^3} k_B T \tag{IV.4}$$

detta di Rayleigh - Jeans. In altri termini: la formula di Planck contiene come casi limite quella 'classica' di Rayleigh–Jeans e quella di Wien, ritenuta corretta alla fine dell'Ottocento sulla base dei dati sperimentali allora disponibili. La formula di Rayleigh–Jeans è detta 'classica' perché non richiede alcuna quantizzazione.

La formula della radiazione di corpo nero può essere scritta sotto la forma:

$$u(v, T) = Z(v) \times \overline{n}(v, T) \times hv$$
(IV.5)

dove

$$Z(v) = \frac{8\pi v^2}{c^3}, \qquad \overline{n}(v, T) = \frac{1}{e^{hv/k_B T} - 1}$$
(IV.6)

106



Figura IV.2. Radiazione di corpo nero a 300 K. Le unità di misura della densità di energia u(v, T) è stata scelta in modo tale da poter usare la medesima scala dell'asse y per tutte e tre le funzioni. Per $hv \ll k_B T$ la formula di Planck è ben approssimata da quella di Rayleigh - Jeans: in questo intervallo, il numero di fotoni per cella unitaria (di volume h^3 dello spazio delle fasi - sezione IV.2.4) cresce rapidamente per $hv/k_B T \rightarrow 0$. Per $hv \gg k_B T$ la formula di Planck è ben approssimata da quella di spazio delle fasi - sezione IV.2.4) cresce rapidamente per $hv/k_B T \rightarrow 0$. Per $hv \gg k_B T$ la formula di Planck è ben approssimata da quella di wien e il numero di fotoni per cella unitaria è molto basso. La densità volumetrica dei fotoni tende a zero per grandi valori di $hv/k_B T$.

Z(v) ha le dimensioni di un numero per unità di volume e di frequenza il cui significato dipende da come lo si calcola. Possiamo chiamare gli Z(v)con il termine generico di "accettori" perché essi possono 'accogliere' fotoni. Allora, nella (IV.5), $\overline{n}(v, T)$ rappresenta il numero di fotoni, di energia hv, attribuito all'equilibrio termico ad ognuno degli accettori Z(v).

Il teorema di equipartizione dell'energia, ereditato dall'Ottocento, richiederebbe di attribuire, all'equilibrio, ad ogni accettore una energia pari a k_BT , indipendente dalla frequenza. Ovviamente, procedendo in questo modo, non si perviene alla formula di Planck (IV.1), ma alla formula di Rayleigh [94] e Jeans [95]:

$$u(v,T) = \frac{8\pi v^2}{c^3} k_B T \tag{IV.7}$$

Questa formula implica che l'energia totale attribuita agli accettori è infinita perché il numero degli accettori $Z(v) \propto v^2$. Che questo risultato fosse fisicamente inaccettabile, era ben chiaro a lord Rayleigh che infatti considerava la (IV.7) come una buona approssimazione solo per piccoli valori di v/T: pertanto, secondo Rayleigh, la (IV.7) doveva essere completata introducendo un esponenziale 'alla Wien'³.

³L'articolo di Rayleigh è scritto in forma molto problematica. In una aggiunta del 1902

Capitolo IV - La luce

Per studiare teoricamente la radiazione di corpo nero è necessario costruire un modello della cavità che contiene la radiazione. Sono stati usati diversi modelli. La possibilità di modelli diversi – anche molto astratti – è dovuta al fatto che la radiazione di corpo nero non dipende dalla natura del materiale che costituisce le pareti della cavità. I modelli debbono specificare le caratteristiche della radiazione e, eventualmente, quelle della materia che emette la radiazione. Essi debbono permettere di calcolare Z(v) e \overline{n} . Nel primo trentennio del Novecento sono apparsi quattro modelli di cavità isoterma (Planck, Debye, Einstein e Bose) e quattro possibili deduzioni della formula di Planck. Come vedremo, solo le deduzioni di Einstein e Bose (quest'ultima opportunamente depurata) sono internamente coerenti.

Prima di delineare il percorso iniziato dal lavoro di Planck del dicembre 1900 e concluso da quello di Bose (1924), è opportuno ricavare la formula di Planck secondo la trattazione rintracciabile nei manuali contemporanei. Essa ci permette di guardare a questo percorso sulla base della conoscenza acquisita e di cogliere le difficoltà e la non linearità dello sviluppo storico senza far ricorso alle ricostruzioni storiche cui il lettore interessato è invitato a rivolgersi. La trattazione che segue utilizza il modello di cavità di Bose: la cavità contiene quanti di luce (fotoni) dotati di energia hv e di quantità di moto hv/c.

Si consideri, nello spazio delle quantità di moto p, una corona sferica di raggio p e altezza dp. Il suo volume è dato da:

$$4\pi p^2 dp = \frac{4\pi v^2}{c^3} h^3 dv; \qquad p = \frac{hv}{c}$$
(IV.8)

Se consideriamo lo spazio delle fasi, in modo da tenere conto anche del volume geometrico V della cavità, dobbiamo scrivere che il volume corrispondente all'intervallo di frequenze dv è dato da:

$$\frac{8\pi v^2}{c^3} h^3 V dv = Z(v) h^3 V dv$$
 (IV.9)

[–] che compare nella riproduzione dell'articolo del 1900 nel quarto volume dei suoi scritti scientifici – Rayleigh, a proposito dell'intervallo in cui il rapporto v/T è piccolo, scrive: «Questo è quello che intendevo sottolineare. Poco dopo, la predizione sopra formulata fu confermata dalle importanti ricerche di Rubens e Kurlbaum (1901), che operarono con lunghezze d'onda eccezionalmente elevate. La formula di Planck, resa nota all'incirca allo stesso tempo, sembra accordarsi molto meglio con i dati sperimentali. Secondo questa modificazione della formula di Wien, l'espressione $e^{-c_2v/T}$ è sostituita da $1/(e^{c_2v/T} - 1)$. Quando T/v è grande, quest'ultima diventa $e^{c_2v/T}$ e l'espressione completa si riduce alla (IV.7) [96, p. 485].» Rayleigh scrive queste formule in funzione della lunghezza d'onda λ .

dove abbiamo introdotto il fattore moltiplicativo 2 dovuto alla polarizzazione del fotone ⁴. Si trova così il termine Z(v) in modo completamente indipendente dall'elettromagnetismo maxwelliano purché si interpreti Z(v)come il numero di celle di volume h^3 contenute nel volume unitario dello spazio delle fasi.

Si indichiamo con Z_s il numero degli accettori – per unità di volume e di frequenza – la cui energia cade nell'intervallo hv_s , $h(v_s + dv_s)$, allora il numero dei modi in cui possiamo distribuire N_s quanti di energia hv_s *indistinguibili* tra Z_s accettori *distinguibili* è dato dall'equazione:

$$R_s(N_s, Z_s) = \frac{(Z_s + N_s - 1)!}{(Z_s - 1)!N_s!}$$
(IV.10)

Pertanto, il numero dei modi in cui possiamo distribuire i quanti di energia di ogni frequenza su tutti gli accettori sarà:

$$W = \prod_{s} R_{s} = \prod_{s} \frac{(Z_{s} + N_{s} - 1)!}{(Z_{s} - 1)!N_{s}!}$$
(IV.11)

Lo stato dell'insieme di tutti gli accettori è univocamente definito dalla sua energia *E*. Questo stato – che possiamo denotare come macrostato M_E – può essere realizzato in tanti modi, il cui numero *W* è dato dalla (IV.11). Ciascuno dei modi *W* – in cui l'insieme degli accettori ha energia *E* – è denotato come un microstato m_E del macrostato M_E . Dal punto di vista dell'unico parametro che individua il macrostato M_E , cioè la sua energia, tutti i microstati sono equivalenti. L'equazione di Boltzmann che esprime l'entropia di un macrostato su basi statistiche ha la forma:

$$S = k_B \ln W \tag{IV.12}$$

Se intendiamo interpretare questa equazione in termini di probabilità del macrostato M_E , dobbiamo assumere che la (IV.12) definisce questa probabilità come uguale a *CW* dove *C* è una costante il cui valore deve essere stabilito sulla base della condizione per cui $S \rightarrow 0$ se $W \rightarrow 1^{5}$. Ne segue che deve essere C = 1.

⁴Pokrowski propose nel 1929 di attribuire un momento angolare intrinseco ad un fotone polarizzato circolarmente pari a $\pm \hbar$ [97]. La prima misura di questo momento angolare intrinseco è dovuta a Richard Beth [98]. Ogni stato di polarizzazione di un fotone è esprimibile come somma di due stati di polarizzazione tra loro ortogonali (pagina 214).

⁵Questo è un modo di esprimere il terzo principio della termodinamica che afferma che l'entropia di un sistema chiuso tende a zero al tendere a zero della temperatura se lo stato accessibile al sistema è unico per T = 0.

Si tratta, a questo punto, di trovare il massimo dell'entropia sotto la condizione che fissa il valore totale dell'energia: $E = \sum_{s} N_{s} h v_{s}$. Condizione necessaria affinché l'entropia abbia un estremo è che (metodo dei moltiplicatori di Lagrange):

$$\frac{\partial \phi}{\partial N_s} = 0$$
 per ogni N_s (IV.13)

dove, con il parametro λ da determinarsi:

$$\phi = S + \lambda \left(\sum_{s} N_{s} h v_{s} - E \right) \tag{IV.14}$$

Supponendo che Z_s e N_s siano numeri grandi rispetto all'unità, possiamo scrivere:

$$(Z_s + N_s - 1)! \approx (Z_s + N_s)!, \qquad (Z_s - 1)! \approx Z_s!$$

e usare l'approssimazione detta di Stirling:

$$\ln n! \approx n \ln n - n; \qquad n \gg 1$$

La condizione (IV.13) assume allora la forma:

$$k_B \ln\left(\frac{Z_s}{N_s} + 1\right) = -\lambda h v_s \tag{IV.15}$$

cioè:

$$\overline{n} = \frac{N_s}{Z_s} = \frac{1}{e^{-\lambda(hv_s)/k_B} - 1}$$
(IV.16)

Siccome, usando la relazione

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{1}{T} \tag{IV.17}$$

si ricava che il parametro λ è dato da

$$\lambda = -\frac{1}{T} \tag{IV.18}$$

si ottiene infine:

$$\overline{n} = \frac{N_s}{Z_s} = \frac{1}{e^{h\nu/k_BT} - 1}$$
(IV.19)

Quindi, dalla (IV.5):

$$u(v,T) = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{hv}{e^{hv/k_B T} - 1}$$
 (IV.20)

i.e la formula di Planck. Alla luce di questa trattazione, possiamo ora discutere i quattro modelli di cavità usati da Planck, Debye, Einstein e Bose.

IV.2.1 Planck (1900)

La cavità contiene "risonatori" cioè particelle cariche in moto armonico che scambiano energia *in modo continuo* con la radiazione elettromagnetica contenuta nella cavità secondo le leggi dell'elettromagnetismo [88]. Le pareti della cavità svolgono un ruolo passivo: esse riflettono la radiazione contenuta nella cavità senza scambio di energia e quantità di moto [trad. ingl. p. 39][88]. Se cerchiamo di interpretare il modello di Planck, dobbiamo affermare che la materia ponderabile (dotata di massa) è costituita dai risonatori e la radiazione da onde elettromagnetiche emesse dai risonatori.

Basandosi solo sulle leggi dell'elettromagnetismo – che prevedono uno scambio continuo di energia tra radiazione e risonatori – Planck aveva precedentemente ricavato che la densità di energia nella cavità isoterma è legata all'energia vibrazionale media \overline{U} di un risonatore dalla relazione [99] [93, p. 50 - 55]:

$$u(v,T) = \frac{8\pi v^2}{c^3} \overline{U}_v \tag{IV.21}$$

Quindi, partendo da questa formula fondamentale, si tratta di calcolare \overline{U}_{ν} che, espresso come richiesto dalla (IV.5), è uguale a $\overline{n}h\nu$. Dato il valore dell'energia totale (risonatori + radiazione), essa deve essere ripartita, se l'entropia è additiva, in modo tale da rendere massima l'entropia della radiazione *e* quella dei risonatori ⁶. Si tratterebbe, allora, di cercare la condizione di equilibrio termodinamico imponendo che l'entropia dei risonatori sia massima. In realtà, Planck non esegue ordinatamente questo calcolo ma utilizza una scorciatoia suggerita dai risultati ottenuti in un lavoro precedente basato su una felice interpolazione matematica, priva però di significato fisico. Si veda, per esempio, [100] e [93, p. 42 - 45].

Come osservato da Einstein nel 1906 [102], la deduzione di Planck era incoerente perché l'espressione di Z(v) era stata ricavata supponendo che lo scambio di energia tra risonatori e radiazione avvenisse, come previsto dalla teoria di Maxwell, in modo continuo. Non era quindi logicamente coerente supporre successivamente che questo scambio di energia avvenisse in termini di quantità discrete hv. Come è possibile che una dimostrazione logicamente incoerente, possa portare al risultato corretto? La risposta è che

⁶Dati due sistemi A e B, la loro entropia S_{AB} è data da $S_{AB} = S_A + S_B$ solo se i due sistemi sono statisticamente indipendenti. Nel nostro caso, ciò significa che i modi possibili di distribuzione dell'energia E_v^{ris} tra i risonatori di frequenza v sono indipendenti dai modi possibili di distribuzione della corrispondente energia E_v^{rad} tra le onde elettromagnetiche aventi la stessa frequenza.

la formula usata da Planck per Z(v) è corretta: Planck l'aveva solo ricavata in un modo incompatibile con la successiva quantizzazione dell'energia della radiazione. Si tratterebbe allora, di ricavare Z(v) in modo indipendente dalla teoria di Maxwell: questo obiettivo fu raggiunto da Bose nel 1924 (sezione IV.2.4).

IV.2.2 Debye (1910)

La cavità contiene onde elettromagnetiche stazionarie [103]. Z(v) rappresenta il numero delle frequenze permesse delle onde stazionarie per unità di volume e di frequenza. A ciascuna frequenza v è attribuito un numero di quanti $\overline{n}(v, T) = 1/(e^{hv/K_BT} - 1)$ di energia hv. Il calcolo di $\overline{n}(v, T)$ è effettuato cercando la distribuzione più probabile dell'energia della radiazione tra le varie frequenze sotto la condizione che l'energia totale rimanga costante. Quindi, Debye sviluppa, passo per passo, il calcolo che Planck non aveva effettuato integralmente, a causa della scorciatoia imboccata.

IV.2.3 Einstein (1916 - 1917)

La cavità contiene molecole i cui livelli elettronici sono quantizzati. Quindi, il modello di cavità di Einstein richiama quello di Planck con due differenze sostanziali: i risonatori classici di Planck (la cui energia può variare solo in modo continuo) sono sostituiti da molecole i cui livelli energetici possono assumere solo valori discreti; mentre nel modello di Planck la radiazione è costituita da onde elettromagnetiche, in quello di Einstein la natura della radiazione non è specificata. Lo scambio di energia tra molecole e radiazione avviene attraverso un processo di assorbimento e due processi di emissione: uno 'senza eccitazione esterna', l'altro 'stimolato' dalla radiazione contenuta nella cavità. Successivamente, Bohr chiamò il processo di emissione 'senza eccitazione esterna' emissione spontanea' mettendo implicitamente in evidenza la diversa concezione del ruolo della causalità nella fisica atomica.

Siano E_m e E_n le energie di due livelli molecolari con $E_m > E_n$; siano inoltre N_m e N_n le molecole che, all'equilibrio termodinamico si trovano nello stato m e n, rispettivamente ⁷. Einstein introduce tre coefficienti A_{mn} , B_{mn} e B_{nm} tali per cui l'equazione che garantisce che, in media, nell'unità di tempo, le transizioni $m \to n$ e le transizioni $n \to m$ siano in egual numero (in modo da mantenere l'equilibrio termodinamico del

⁷Questo modello differisce leggermente da quello usato da Einstein: per la precisione, si considerano qui due livelli molecolari non degeneri. Questa semplificazione non altera i risultati essenziali del calcolo.

sistema molecole+radiazione) si scrive ⁸:

$$N_n B_{nm} u(v, T) = N_m (B_{mn} u(v, T) + A_{mn})$$
 (IV.22)

Al primo membro compare il numero delle molecole che, nell'unità di tempo, compiono la transizione $n \to m$ (assorbimento); al secondo membro, il numero di molecole che compiono la transizione inversa $m \to n$ (emissione). Si noti come l'assorbimento e la emissione stimolata siano controllate dai due coefficienti B_{nm} e B_{mn} e siano proporzionali alla densità di energia u(v, T). Per la statistica di Boltzmann:

$$\frac{N_m}{N_n} = e^{-(E_m - E_n)/kT} \tag{IV.23}$$

Dalla (IV.22) si ottiene allora:

$$u(v,T) = \frac{A_{mn}}{B_{nm}e^{(E_m - E_n)/kT} - B_{mn}}$$
(IV.24)

Per $T \to \infty$, $u(v, T) \to \infty$ («come è da supporte»): deve allora essere $B_{nm} = B_{mn}$. Quindi:

$$u(v,T) = \frac{A_{mn}}{B_{mn}} \frac{1}{e^{(E_m - E_n)/k_B T} - 1}$$
(IV.25)

Il fatto che l'espressione della u(v, T) debba avere la forma imposta dalla 'legge dello spostamento' di Wien:

$$u(v,T) = v^3 f(\frac{v}{T}) \tag{IV.26}$$

comporta che, nella (IV.25), sia

$$\frac{A_{mn}}{B_{mn}} = \alpha v^3 \tag{IV.27}$$

e:

$$E_m - E_n = h\nu \tag{IV.28}$$

«dove α e h sono costanti universali». Si osservi che la (IV.28) è la condizione di Bohr relativa alla transizione di un elettrone tra due stati quantici, qui

⁸I coefficienti introdotti da Einstein sono assunti come dipendenti solo dalle caratteristiche dei livelli coinvolti; in particolare, sono indipendenti dalla densità della radiazione in cui gli atomi sono immersi. La meccanica quantica sarà poi in grado di dimostrare queste proprietà dei coefficienti di Einstein.

ricavata e non assunta come postulato; inoltre, la deduzione che conduce alla (IV.28) rappresenta un nuovo modo di introdurre la costante h di Planck.

Per trovare l'espressione della costante α , è necessario effettuare un passaggio al limite per valori di v/T piccoli e utilizzare la formula di Rayleigh - Jeans (IV.7). Si ottiene così $\alpha = 8\pi h/c^3$ e, di conseguenza, la (IV.25) si trasforma nella formula di Planck (IV.1).

Osservazioni:

- Diversamente dalle trattazioni di Planck e Debye, basate sulla massimizzazione dell'entropia, quella di Einstein si basa sulla situazione stazionaria che caratterizza l'equilibrio termodinamico: il numero di transizioni in assorbimento per unità di tempo deve essere uguale a quello delle transizioni in emissione.
- Se si trascura l'emissione stimolata, si perviene come si può facilmente verificare – alla formula di Wien e non a quella di Planck. L'emissione stimolata, l'unica presente in una trattazione maxwelliana, permette di recuperare l'andamento della u(v, T) per piccoli valori di v/T, tipica di una trattazione ondulatoria alla Rayleigh - Jeans.
- Come abbiamo osservato, la natura della radiazione contenuta nella cavità non è specificata nelle ipotesi di partenza. La trattazione mostra invece che essa è composta da quanti di luce di energia $hv = E_m - E_n$ (formula di Bohr ricavata, non ipotizzata). Nella parte finale del lavoro, Einstein dimostra che una condizione sufficiente affinché le molecole abbiano, all'equilibrio, la distribuzione di velocità di Maxwell - Boltzmann è che durante l'assorbimento o l'emissione le molecole scambino con la radiazione non solo una energia hv ma anche una quantità di moto hv/c. Ciò equivale ad attribuire ai quanti di luce, oltre all'energia hv, una quantità di moto pari a hv/c (sezione IV.3).
- Come è stato posto in evidenza intorno agli anni Sessanta del secolo scorso, l'emissione stimolata svolge un ruolo essenziale nel funzionamento dei maser e dei laser. In particolare, il fotone emesso per 'stimolazione' conserva tutte le caratteristiche dei fotoni 'stimolanti': energia, quantità di moto e stato di polarizzazione.
- L'uso, essenziale, della legge di Wien (IV.26), ricavata usando la descrizione ondulatoria, indica che Einstein ha usato nello stesso lavoro, sia

la descrizione corpuscolare, sia quella ondulatoria. In realtà, la legge di Wien può essere ricavata anche all'interno della descrizione corpuscolare. Questa possibilità è dovuta al fatto che la deduzione di Wien si basa sulla variazione di volume di una cavità sferica contenente radiazione di corpo nero, sui principi della termodinamica, sulla pressione della radiazione e sull'effetto Doppler (al primo ordine). Pertanto, la trattazione di Einstein può essere resa internamente coerente.

IV.2.4 Bose (1924)

La cavità contiene quanti di luce (fotoni) dotati di energia hv e quantità di moto hv/c [89]. Z(v) è il numero di celle di volume h^3 , *moltiplicato per due*, contenute nello spazio delle fasi per unità di volume (dello spazio delle fasi). Scrive Bose:

Per tener conto della polarizzazione, sembra obbligatorio moltiplicare questo numero per un fattore 2 così che il numero di celle appartenenti all'intervallo dv diventa $(8\pi v^2/c^3)dv$ [89, trad. it. p. 2].

Questo passaggio è cruciale, ma oscuro: Bose usa termini ondulatori (polarizzazione) in una descrizione corpuscolare. Come abbiamo visto (pagina 108), la polarizzazione dei fotoni è stata introdotta solo successivamente: quindi, a posteriori, la moltiplicazione per un fattore due operata da Bose è giustificata senza dover ricorrere ad una mescolanza di descrizioni corpuscolare e ondulatoria.

Le deduzioni di Planck, Debye e Bose usano la stessa formula (IV.6) per Z(v) e la medesima formula (IV.10) (o una formula equivalente nel caso di Bose) che fornisce il numero dei modi R in cui N quanti di energia indistinguibili possono essere distribuiti tra Z accettori distinguibili. Il risultato finale è quindi lo stesso, ed è, ovviamente, indipendente da come la formula per Z(v) è stata ricavata.

Tuttavia, le tre deduzioni non sono equivalenti per due ragioni. La prima risiede nel fatto che nelle deduzioni di Planck e Debye la distribuzione dell'energia della radiazione per quantità discrete tra i varî accettori è incompatibile con il calcolo di Z(v) basato sull'elettromagnetismo maxwelliano in cui l'energia dei risonatori varia in modo continuo. La seconda è ancora più dirimente. Mentre nelle deduzioni di Planck e Debye la radiazione elettromagnetica è costituita da onde, in quella di Bose ci sono solo quanti di luce, dotati di energia e quantità di moto, e la statistica che ne consegue è la statistica dei fotoni.

Capitolo IV - La luce

La trattazione di Bose condivide con quella di Planck e Debye il valore di Z(v), ma il calcolo riguardante la ripartizione dei quanti tra gli accettori Z(v) è svolto in modo diverso. Bose suddivide le celle Z_s , la cui energia è compresa tra E_s e $E_s + dE_s$, in funzione del numero di quanti che le occupano. Quindi scrive:

$$Z_s = \sum_r p_r^s \tag{IV.29}$$

$$N_s = \sum_r r p_r^s \tag{IV.30}$$

$$E = \sum_{s} N_{s} h v_{s}$$
 (IV.31)

dove p_r^s è il numero di celle che contengono r quanti (r = 0, 1, 2...), N_s è il numero di quanti contenuti nelle celle Z_s e E è l'energia totale contenuta nella cavità. Bose afferma poi che «la probabilità dello stato definito da tutti i p_r^s è evidentemente»:

$$W = \prod_{s} \frac{Z_{s}!}{p_{0}^{s}! p_{1}^{s}! \dots}$$
(IV.32)

Bose cerca poi il massimo della funzione $\log W$ sotto le condizioni di Z_s ed E costanti. Ritrova così la formula di Planck (IV.1). L'equazione (IV.32) contiene una ipotesi fondamentale *non* resa esplicita da Bose: i quanti sono indistinguibili e le celle sono distinguibili.

Il lavoro di Bose non brilla per chiarezza e precisione. In particolare, Abraham Pais ritiene che Bose, per quanto riguarda la (IV.32), sia partito da un'equazione analoga di Boltzmann, in cui, però, al posto di celle distinguibili ci sono particelle distinguibili. Quindi, secondo Pais, Bose ha proceduto seguendo la regola: ad ogni occorrenza, sostituisci 'particelle' con 'celle' [109, p. 895]. Questa ipotesi di Pais è rafforzata dal fatto che Bose impone la conservazione del numero Z_s delle celle, così come Boltzmann aveva imposto la conservazione del numero delle particelle. Peraltro, la costanza di Z_s non è necessaria, perché Bose sarebbe - ovviamente - arrivato alla formula di Planck anche imponendo solo la costanza dell'energia. Il commento finale di Pais è: «Credo che non ci sia più stato un così efficace sparo nel buio da quando Planck introdusse il quanto nel 1900 [109, p. 895].» Peraltro, le vicende del lavoro di Bose costituiscono un emblematico capitolo di storia della fisica. Bose aveva inizialmente inviato il suo lavoro al Philosophical Magazine: il lavoro fu respinto. Bose non si perse d'animo e scrisse ad Albert Einstein:

Egregio Signore, mi sono azzardato ad inviarle l'articolo allegato affinché lei possa valutarlo. Sono ansioso di sapere che cosa ne pensa. Come potrà vedere, ho cercato di dedurre il coefficiente $8\pi v^2/c^3$ della legge di Planck indipendentemente dall'elettrodinamica classica, assumendo soltanto che la regione elementare dello spazio delle fasi abbia volume h^3 . Non conosco abbastanza la lingua tedesca per tradurre l'articolo. Se lei ritiene che il lavoro sia degno di essere pubblicato, le sarò grato se vorrà fare in modo che esso sia pubblicato su Zeitschrift fur Physik. Sebbene io sia un estraneo per lei, non esito a farle questa richiesta. Poiché noi siamo tutti suoi allievi, sebbene usufruiamo dei suoi insegnamenti solo attraverso i suoi scritti...[110, p. 1212]

Einstein tradusse l'articolo e lo fece pubblicare, aggiungendo in nota: «È mia opinione che la derivazione di Bose della formula di Planck costituisca un importante passo avanti. Il metodo usato, inoltre, conduce alla teoria quantica del gas ideale, come dimostrerò in dettaglio altrove [110, p. 1212].» Come abbiamo visto, sin dal 1906 Einstein aveva sottolineato la necessità di ricavare il termine $8\pi v^2/c^3 = Z(v)$ indipendentemente dall'elettromagnetismo per rendere logicamente coerente la deduzione della formula di Planck: Bose non avrebbe potuto trovare maggiore considerazione da parte di alcun altro fisico.

La formula (IV.5) da cui siamo partiti per ripercorrere le varie deduzioni della formula di Planck, spiega perché il principio di equipartizione dell'energia sia valido solo quando $hv \ll k_B T$. In questo caso si ha che $\overline{n}(v, T) \approx$ $k_B T/hv \gg 1$ e quindi, l'energia media attribuita ad ogni accettore di frequenza v sarà $\overline{E} \approx (k_B T/hv)hv = k_B T$ come previsto dal teorema di equipartizione. Pertanto, l'approssimazione $hv \ll k_B T$ che trasforma la formula di Planck in quella di Rayleigh–Jeans, descrive la situazione fisica in cui il quanto di energia hv è assai piccolo rispetto a $k_B T$ e il numero medio di quanti attribuiti ad ogni accettore è $\gg 1$. Invece, nell'approssimazione di Wien, si ha $\overline{n}(v, T) \approx e^{-hv/k_B T} \ll 1$ e l'energia media attribuita ad ogni accettore è $\ll hv$.

La derivazione di Einstein si differenzia dalle altre perché essa assume, sin dall'inizio, la quantizzazione dell'energia degli elettroni contenuti nelle molecole, mentre non fa alcuna ipotesi sulla struttura (continua o discreta) dell'energia della radiazione. Come si vedrà più avanti (sezione IV.7.2), la formula di Bohr è una formula approssimata perché essa trascura il fatto che nel processo di emissione di un quanto di luce deve essere conservata anche la quantità di moto. In realtà, a seconda della velocità dell'atomo emettente, hv può essere uguale, minore o maggiore di $E_m - E_n$ (pagina 140). Il fatto che anche Einstein ritrovi la formula di Bohr, è dovuto alla stessa ragione. Infatti, Einstein arriva alla conclusione che nel processo di emissione di un quanto di luce è conservata la quantità di moto con considerazioni di natura statistica, *dopo* aver ritrovato la formula di Bohr.

In alcuni manuali la formula di Planck per la radiazione di corpo nero è ricavata in modo diverso da come l'abbiamo dedotta ⁹. L'idea di partenza per il calcolo di Z(v) è quella di Debye: sono i modi normali di vibrazione di onde stazionarie contenute in una cavità. Ma mentre Debye calcola il numero di quanti $\overline{n}(v, T)$ da associare a ciascuno di questi modi seguendo un percorso alla Planck (massimizzazione dell'entropia), la deduzione di questi manuali procede nel modo seguente. Si suppone che l'energia di ogni modo di vibrazione di frequenza v possa assumere solo valori discreti nhv; n = 0, 1, 2... e si calcola il valore medio dell'energia $\overline{\varepsilon}$ di ciascuno di questi modi scrivendo:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} nh\nu e^{-nh\nu/k_BT}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-nh\nu/k_BT}}$$
(IV.33)

Con qualche passaggio, si ottiene:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT} - 1} \tag{IV.34}$$

Pertanto:

$$u(v,T) = Z(v)\overline{n}(v,T)hv = Z(v)\overline{\varepsilon} = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{hv}{e^{hv/k_BT} - 1}$$
(IV.35)

i.e. la formula di Planck.

Osservazioni:

- Il modello di cavità usato è quello di Debye: la cavità contiene onde elettromagnetiche e Z(v) rappresenta il numero dei modi permessi per unità di volume e di frequenza.
- Si suppone che l'energia di ogni singolo modo sia quantizzata (come un oscillatore armonico). Il valore medio $\overline{\epsilon}$ dell'energia di un modo è calcolato considerando un insieme di modi aventi la stessa frequenza in equilibrio termico con modi di ogni frequenza possibile e supponendo – alla Boltzmann – che la probabilità che un modo di frequenza v si trovi nello stato di energia nhv sia data da $P(nhv) = Ae^{-nhv/k_BT}$

⁹Si vedano, per esempio, [111, p. 245 - 251], [112, p. 51 - 55].

con $A = 1 / \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-nhv/k_BT}$ (perchè la somma delle probabilità deve essere uguale ad uno).

- L'energia di punto zero di ogni singolo modo, pari a (1/2)*hv*, è ignorata perché, altrimenti, l'energia contenuta nella cavità sarebbe infinita. Questa scelta rende il modello internamente incoerente.
- Questa trattazione oscura il risultato secondo cui le caratteristiche della radiazione di corpo nero sono determinate dall'equilibrio termodinamico di un gas di fotoni.

IV.2.5 La radiazione cosmica di fondo

Nel 1965 Arno Penzias e Robert Wilson scoprirono che la Terra è investita da una radiazione sostanzialmente isotropa [113].

In realtà la radiazione cosmica di fondo presenta variazioni *intrinseche* di intensità *non* isotrope dell'ordine di una parte su 10⁵. In quel che segue, tale anisotropia, dovuta alla distribuzione della materia e dell'energia nelle prime fasi di vita dell'Universo, è ignorata.

Misure effettuate con il satellite *COBE* (COsmic Background Explorer), lanciato nel 1989, hanno mostrato che tale radiazione corrisponde a quella emessa da un corpo nero alla temperatura di $2.725 \pm 0.002 K$ e che l'anisotropia *non* intrinseca osservata è dovuta - per effetto Doppler - al moto del satellite intorno alla Terra, della Terra intorno al Sole, del Sole nella Galassia e della Galassia attraverso l'Universo: la Terra viaggia nello spazio ad una velocità di circa 360 km al secondo.

L'esistenza della radiazione cosmica di fondo permette di definire *in quiete assoluta* l'osservatore che vede la radiazione di fondo isotropa (prescindendo, dalle anisotropie intrinseche). Denotiamo con *O* tale osservatore. Un osservatore *O'* (il satellite) in moto inerziale rispetto ad *O*, lungo il comune asse $x \equiv x'$ con velocità *v* vede la radiazione di fondo anisotropa per effetto Doppler. Si ha (equazione II.23):

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 + B \cos \theta'}; \qquad B = \frac{v}{c}$$
(IV.36)

dove θ' è l'angolo formato dalla direzione di propagazione della radiazione con l'asse $x' \equiv x$. Questa equazione, scritta in funzione dell'angolo di osservazione $\theta'_{oss} = \pi - \theta'$, assume la forma:

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 - B \cos \theta'_{oss}} \tag{IV.37}$$

Cambiando la direzione di osservazione, O' deve individuare quella per cui la frequenza misurata in una direzione e in quella opposta sia la stessa (ed uguale a $v\sqrt{1-B^2}$). Queste due direzioni sono perpendicolari alla sua direzione di moto rispetto all'osservatore in quiete ed alla direzione opposta. Individuate queste due direzioni, O' deve cercare la massima intensità in funzione della frequenza in entrambe le direzioni. Siano v'_+ e v'_- queste due frequenze. La più grande v'_+ corrisponde alla sua direzione di moto; l'altra alla direzione opposta. Valgono allora le due relazioni:

$$v'_{+} \times v'_{-} = v^2 \tag{IV.38}$$

$$B = \frac{v'_{+} - v'_{-}}{v'_{+} + v'_{-}}$$
(IV.39)

Così, O' ottiene Bc, cioè il valore della sua velocità e la frequenza v, corrispondente al massimo di intensità, che sarebbe misurata da O. Se θ'_{oss} è una direzione di osservazione qualunque, lo spettro osservato da O' lungo questa direzione in funzione della frequenza, può essere 'tradotto' nello spettro che osserverebbe O poiché O' conosce il valore della propria velocità v.

Ovviamente, il SRI *O* che vede la radiazione di fondo isotropa si distingue da tutti gli altri SRI solo per questa caratteristica: in esso, come in tutti gli SRI, le leggi della fisica hanno la medesima forma matematica.

IV.2.6 Sviluppi successivi: le statistiche quantiche

Il lavoro di Bose chiuse un lungo capitolo di storia della fisica, iniziato negli anni Sessanta dell'Ottocento. Nel contempo, esso aprì la strada a nuovi sviluppi. Einstein applicò il procedimento statistico di Bose ad un gas di atomi, fondando così la statistica quantica per particelle non relativistiche. Successivamente, Fermi e Paul Dirac svilupparono la statistica per gli elettroni [116, 117]. Si comprese poi che la statistica di Bose - Einstein si applica a particelle dotate di spin intero (bosoni), descritte da funzioni d'onda simmetriche, mentre quella di Fermi - Dirac alle particelle con spin semi - intero (fermioni), descritte da funzioni d'onda anti - simmetriche [108].

Einstein applicò il metodo di Bose introducendo però due necessarie modifiche [109, p. 895 - 897]¹⁰. La prima consiste nell'esprimere la quantità di moto delle particelle secondo quanto prescritto dalla dinamica newtoniana:

$$p = \sqrt{2mE} \tag{IV.40}$$

¹⁰Nel biennio 1924 - 1925, Einstein dedicò all'argomento tre lavori. Di questi, solo il primo è disponibile in una versione inglese.

La seconda impone che il numero di particelle sia costante. Si tratta allora di riscrivere opportunamente la (IV.5):

$$u(E,T) = Z(E)[\overline{n}(E,T)E]$$
(IV.41)

dove u(E, T) è la densità di energia (energia per unità di volume) delle particelle la cui energia cade nell'intervallo E, E + dE; Z(E) è la densità delle celle (numero delle celle per unità di volume) di volume h^3 contenute nella corona sferica individuata da p ed p + dp e \overline{n} il numero di particelle attribuite all'equilibrio alle celle Z(E). Tenendo conto della (IV.40) si ottiene l'espressione di Z(E):

$$Z(E) = 2\pi (2m)^{3/2} E^{1/2}$$
(IV.42)

Il calcolo è poi effettuato come nel caso della statistica dei fotoni (equazioni (IV.10) \rightarrow (IV.12)), con l'aggiunta della conservazione del numero delle particelle. Questa condizione è responsabile della comparsa del potenziale chimico μ delle particelle nell'espressione che si ricava per \overline{n} :

$$\overline{n} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/(k_B T)} - 1}$$
 (IV.43)

Si osservi che deve essere $e^{-\mu/k_BT} \ge 1$, cioè:

$$\mu \le 0 \tag{IV.44}$$

perché, in caso contrario, \overline{n} sarebbe negativo. Se $\mu < 0$ la statistica è quella di un gas di particelle dotate di massa; se $\mu = 0$ la statistica si riduce a quella dei fotoni (Bose). Alla fine, si ottiene:

$$u(E,T) = Z(E)\overline{n}E = 2\pi (2m)^{3/2} E^{3/2} \frac{1}{e^{(E-\mu)/(k_B T)} - 1}$$
(IV.45)

Se $E \to 0$, e $\mu \to 0$ allora $\overline{n} \to \infty$: tutte le particelle tendono ad occupare lo stato fondamentale. In questo caso, il gas si trasforma in un 'condensato di Bose - Einstein' ¹¹.

Potenziale chimico. Se si suppone che il numero *N* delle particelle di un sistema possa cambiare, il primo principio della termodinamica assume la forma:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN \tag{IV.46}$$

¹¹I primi condensati di Bose - Einstein furono prodotti e osservati nel 1995. La loro realizzazione richiede la padronanza di difficili tecniche di intrappolamento magnetico (confinamento in volumi la cui dimensione lineare è dell'ordine di 10μ) e raffreddamento degli atomi [114, 115].



Figura IV.3. Andamento della probabilità di occupazione di un livello energetico per i fermioni P(E) (linea tratteggiata) e del numero medio di bosoni per cella unitaria (linea piena). Per grandi valori di $(E - \mu)/(k_B T)$, le due curve tendono a sovrapporsi e le due statistiche (Fermi - Dirac e Bose - Einstein) tendono a quella di Boltzmann.

Pertanto:

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} \tag{IV.47}$$

Il potenziale chimico è la variazione dell'energia del sistema dovuta all'aggiunta di una particella, mantenendo costante l'entropia ed il volume. Nel caso di un gas ideale (senza interazione tra le particelle) di atomi identici con spin nullo ed a temperature sufficientemente elevate (in modo tale che sia valido il limite classico), il potenziale chimico è dato da:

$$\mu = -k_B T \ln\left[\frac{V}{N} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]$$
(IV.48)

Questa espressione può essere riscritta in una forma significativa:

$$\mu = -k_B T \ln \frac{l^3}{\lambda_T^3}; \qquad l = \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}; \qquad \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \qquad (IV.49)$$

dove *l* è la distanza media tra le particelle. Quindi, in questa approssimazione di temperature sufficientemente elevate, il potenziale chimico di un gas ideale è sempre negativo perché $l_T \ll l$.

La statistica dei fermioni deve tener conto del fatto che ogni stato energetico permesso può essere occupato da una sola particella. Pertanto, la statistica

di Fermi - Dirac fornisce la probabilità P(E) che il livello di energia E sia occupato:

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/(k_B T)} + 1}$$
 (IV.50)

dove il potenziale chimico μ è sempre positivo. Nei solidi cristallini, il potenziale chimico allo zero assoluto è chiamato 'livello di Fermi'. Nella figura IV.3 è mostrato l'andamento di P(E) (fermioni) e di \overline{n} (bosoni) in funzione di $(E - \mu)/(k_BT)$.

IV.3 L'ipotesi euristica dei quanti di luce

Nel 1905, Einstein riapre la questione della natura della luce e, nell'introduzione del lavoro sui quanti di luce, scrive:

... nonostante gli esperimenti abbiano pienamente confermato la teoria della diffrazione, della riflessione, della rifrazione, della dispersione e così via, è concepibile che una teoria della luce basata su funzioni spaziali continue porti a contraddizioni con l'esperienza se la si applica ai fenomeni della generazione e della trasformazione della luce. A me sembra infatti che le osservazioni sulla "radiazione di corpo nero", la fotoluminescenza, la generazione dei raggi catodici tramite la luce ultravioletta e altri classi di fenomeni concernenti la generazione e la trasformazione della luce appaiano più comprensibili nell'ipotesi di una distribuzione spaziale discontinua dell'energia luminosa. Secondo l'ipotesi che sarà qui considerata, quando un raggio luminoso uscente da un punto si propaga, l'energia non si distribuisce in modo continuo in uno spazio via via più grande; essa consiste invece in un numero finito di quanti di energia, localizzati in punti dello spazio, i quali si muovono senza dividersi e possono essere assorbiti e generati solo nella loro interezza. Nel seguito esporrò il ragionamento e citerò i fatti che mi hanno condotto su questa strada, nella speranza che il punto di vista qui illustrato possa dimostrarsi utile alle ricerche di qualche studioso [105, p. 87].

Questo incipit illustra chiaramente la tensione tra conoscenza considerata acquisita (immagine fisica del Mondo) e una idea di come le cose possano svolgersi nel Mondo (immagine del Mondo del singolo scienziato). Infatti, Einstein pone in discussione la teoria ondulatoria della luce (immagine fisica del Mondo), sulla base dell'idea che possano esistere nel Mondo i quanti di luce (immagine del Mondo contenente asserzioni di esistenza).

Einstein procede cercando di fornire un supporto teorico alla sua ipotesi, supporto basato sulla termodinamica statistica. L'equazione $E_{ph} = hv$ che lega, attraverso la costante di Planck *h*, l'energia E_{ph} del quanto di luce alla frequenza *v* della radiazione elettromagnetica, descritta come un'onda, compare solo dopo una discussione della analogia *quantitativa* tra la variazione di entropia di una radiazione monocromatica di corpo nero al variare del volume, nei limiti di validità della legge di Wien (IV.3), e quella del gas perfetto. Per la radiazione di corpo nero, Einstein ricava l'espressione:

$$S - S_0 = k_B \frac{E}{h\nu} \ln \frac{V}{V_0} \tag{IV.51}$$

dove *E* è l'energia della radiazione compresa tra la frequenza v e la frequenza v + dv e k_B è la costante di Boltzmann. Mentre per il gas perfetto, vale l'equazione:

$$S - S_0 = k_B N \ln \frac{V}{V_0} \tag{IV.52}$$

dove *N* è il numero di molecole del gas contenute nel volume iniziale V_0 . Se si pone E = Nhv le due equazioni coincidono. È quindi ragionevole attribuire al singolo quanto di luce l'energia $E_{ph} = hv^{12}$.

Come abbiamo visto, Einstein attribuirà ai quanti di luce la quantità di moto hv/c solo nel 1916, di nuovo in un contesto sorretto dalla termodinamica statistica. Questa attribuzione sarebbe stata possibile anche intorno al 1905. Ad un'onda elettromagnetica piana monocromatica è associata una densità di quantità di moto il cui modulo è dato da

$$g = \frac{S}{c^2} = \frac{u}{c}$$

dove S è il modulo del vettore di Poynting e u la densità di energia del campo elettromagnetico. Ne segue che il valor medio di g è

$$\langle g \rangle = \frac{\langle u \rangle}{c}$$

Se esprimiamo $\langle u \rangle$ in termini di quanti di luce ($\langle u \rangle = \langle n \rangle hv$, dove $\langle n \rangle$ è il numero medio di quanti di luce per unità di volume), segue immediatamente che ad un quanto dobbiamo associare una quantità di moto

¹²Il termine fotone per denotare un quanto di luce si diffuse a partire dal 1926, dopo che il chimico - fisico Gilbert Newton Lewis ebbe coniato questo termine per indicare «... questo ipotetico nuovo atomo, che non è luce ma gioca un ruolo essenziale in ogni processo di radiazione...» [118, p. 874]. Questo ipotetico nuovo atomo che farebbe parte di ogni atomo e che verrebbe emesso e assorbito nei processi di emissione o di assorbimento era proposto in alternativa al concetto einsteiniano di quanto di luce. Chiamare 'fotone' il quanto di luce è stato uno sberleffo fatto alla storia (e ad Einstein).

pari a hv/c. Secondo un'opinione diffusa in letteratura, Einstein avrebbe potuto attribuire una quantità di moto al quanto di luce anche in un altro modo, trattando il quanto di luce come una particella relativistica con massa nulla. Infatti, per una particella relativistica dotata di massa, il quadrato del modulo del quadrivettore energia - impulso $(E/c, p_i)$ è dato da:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \tag{IV.53}$$

da cui, ponendo m = 0, si ricava immediatamente p = E/c valida per i quanti di luce ¹³. L'ipotesi di Abraham Pais è che Einstein non abbia voluto mescolare un'ipotesi euristica (il quanto di luce) con una teoria da lui considerata come 'la verità rivelata' [109, p. 909]. Si osservi, tuttavia, come l'uso dell'equazione (IV.53) per un quanto di luce costituisca una estrapolazione che deve essere giustificata: si veda la sezione V.5.

La riluttanza di Einstein dinnanzi ad un possibile incrocio tra relatività speciale e ipotesi dei quanti di luce, emerge anche in un altro contesto. Nel lavoro del 1905 sulla relatività speciale, Einstein, dopo aver ricavato la formula dell'effetto Doppler per la luce, trattata come un'onda elettromagnetica, dimostra che l'energia di un'onda elettromagnetica contenuta in un volume finito, si trasforma, passando da un sistema inerziale ad un altro, come la frequenza dell'onda. Se $E_0 \sin(2\pi v t)$ è il campo elettrico di un'onda elettromagnetica monocromatica, la densità media dell'energia elettromagnetica, calcolata su un periodo, è data da < $u >= \varepsilon_0 E_0^2/2$. Il risultato di Einstein implica che $\langle u \rangle V \propto v$. Se assumiamo che la luce sia composta da quanti di luce, possiamo scrivere $\langle u \rangle V = nhvV$, dove *n* è il numero di quanti di luce contenuti nell'unità di volume. Siccome nV non varia passando da un sistema inerziale ad un altro, l'ipotesi dei quanti di luce e la teoria di Maxwell implicano la stessa dipendenza dalla frequenza dell'energia contenuta in un volume finito: l'ipotesi dei quanti di luce è, quindi, formalmente compatibile con l'elettromagnetismo maxwelliano. Naturalmente, questa compatibilità formale non può oscurare l'incompatibilità tra la distribuzione spaziale continua dell'energia elettromagnetica prevista da Maxwell con la sua distribuzione discreta implicata dall'ipotesi dei quanti di luce.

Complessivamente, il lavoro di Einstein è caratterizzato da un atteggiamento cauto, ravvivato però dalla «speranza che il punto di vista qui illustrato possa dimostrarsi utile alle ricerche di qualche studioso». La speranza di Einstein fu delusa: la comunità scientifica non accolse favorevolmente

¹³Si veda la sezione V.5 per una discussione approfondita.

l'ipotesi dei quanti di luce, mostrando così la tensione tra conoscenza considerata come acquisita (immagine fisica del Mondo) e immagine del Mondo del singolo scienziato che ipotizza l'esistenza di un nuovo 'oggetto'. Si possono ricordare, a proposito, quattro episodi significativi.

Nel settembre del 1909, Johannes Stark partecipò all'ottantunesimo Congresso degli scienziati e medici tedeschi (sezione di fisica) che si svolse a Salisburgo. Einstein presentò una relazione 'Sullo sviluppo delle nostre concezioni riguardanti la natura e la costituzione della radiazione' [119]. Einstein affrontò la questione delle descrizioni ondulatoria e corpuscolare della luce; in particolare discusse dei fenomeni che non possono essere trattati con la descrizione ondulatoria. Tra questi, Einstein citò il caso degli elettroni (secondari) estratti da una lastra metallica da raggi X prodotti in un anticatodo dagli elettroni (primari) incidenti su di esso. L'energia degli elettroni secondari è dello stesso ordine di grandezza di quella degli elettroni primari: questo risultato appare incompatibile con l'ipotesi che i raggi X prodotti nell'anticatodo siano costituiti da onde. Nella discussione che seguì, intervenne anche Stark ribadendo, tra l'altro, la rilevanza delle osservazioni di Einstein sugli elettroni primari e secondari. Rientrato in sede (Aachen), Stark si dedicò alla stesura di un articolo in cui sostenne che i raggi X emessi dall'anticatodo non dovevano essere descritti come onde elettromagnetiche, ma come quanti di luce dotati di energia hv e quantità di moto $(hv/c^2)c$ [120]. Stark prese in considerazione l'interazione tra un elettrone incidente sull'anticatodo e una 'particella' dell'anticatodo e suppose che il risultato di questa interazione fosse l'emissione di un quanto X. Scrisse quindi l'equazione di conservazione della quantità di moto in forma newtoniana, ma non quella dell'energia. Con queste premesse, Stark non era in grado di risolvere matematicamente il problema; si limitò quindi a considerazioni qualitative sulla distribuzione spaziale e sull'intensità dei quanti X emessi. La proposta di Stark era chiaramente incompleta e poteva quindi apparire ai fisici teorici anche piuttosto maldestra. Comunque, bisogna riconoscere che la trattazione di Stark, per la prima volta, considerava l'interazione tra un quanto di radiazione, considerato come una particella, ed una particella materiale alla luce delle leggi di conservazione. Come vedremo nella sezione IV.7.2. nel 1922 Schrödinger sviluppò rigorosamente questa idea applicandola all'emissione di un quanto di luce da parte di un atomo in moto [41]. Successivamente, lo stesso approccio fu adottato da Compton per spiegare il fenomeno che prese poi il suo nome (sezione IV.8). Ma, intorno al 1910, in un contesto di diffusa diffidenza nei confronti dell'ipotesi dei quanti di

luce, i tempi non erano maturi. Non sorprende quindi che Sommerfeld si guardasse bene dal prendere in seria considerazione– ed eventualmente risolvere – il problema posto da Stark. Sommerfeld sviluppò invece la teoria della 'Bremsstrahlung', basata sull'emissione di onde elettromagnetiche da parte degli elettroni frenati all'interno dell'anticatodo [121]. Ci fu anche uno scambio di lettere tra i due fisici: Stark non prese molto bene le critiche di Sommerfeld e, di conseguenza, i loro rapporti si raffreddarono [122].

Il secondo episodio fu la lettera indirizzata da Planck, Whalter Nernst, Heinrich Rubens e Emil Warburg al Ministro dell'Educazione per sostenere la nomina di Einstein a membro dell'Accademia Prussiana delle Scienze (1913). I quattro fisici scrivevano, tra l'altro:

In definitiva, noi possiamo affermare che non c'è alcuno dei grandi problemi di cui la fisica moderna è così ricca al quale Einstein non abbia dato un importante contributo. Che talvolta egli abbia mancato l'obiettivo nelle sue speculazioni, come, per esempio, nella sua ipotesi dei quanti di luce, non può essere usato troppo contro di lui, perché non è possibile introdurre nuove fondamentali idee, persino nelle scienze più esatte, senza correre, di tanto in tanto, qualche rischio [91, p. 44].

Il terzo è la posizione di Bohr nel lavoro del 1913 sulla 'Struttura degli atomi e delle molecole' in cui presenta quello che sarà poi indicato come il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno ¹⁴. Bohr, pur citando i lavori di Einstein del 1905 (sui quanti di luce) e del 1906 (in cui Einstein critica il procedimento con cui Planck arriva alla formula (IV.1)), non utilizza il concetto di quanto di luce come elemento costitutivo della radiazione elettromagnetica. Infatti, quando si tratta di descrivere la transizione tra due livelli energetici, Bohr scrive: «Questo processo è seguito dall'emissione di una radiazione *omogenea*, per la quale la relazione tra la frequenza e la quantità di energia emessa è quella data dalla teoria di Planck» [17, p. 7].

Il quarto episodio, è il caustico commento di Millikan che, dopo aver verificato sperimentalmente l'equazione proposta da Einstein per l'effetto fotoelettrico, scrive:

Nel 1905, Einstein per la prima volta associò i fenomeni fotoelettrici alla teoria quantica avanzando l'audace, per non dire temeraria [rec-kless] ipotesi di un corpuscolo elettromagnetico di energia hv, energia che dovrebbe essere trasferita per assorbimento ad un elettrone.

¹⁴Per una discussione del lavoro di Bohr si può vedere [9].
Capitolo IV - La luce

Questa ipotesi può ben essere definita sconsiderata innanzitutto perché una perturbazione elettromagnetica che rimane localizzata nello spazio appare come una violazione del concetto stesso di perturbazione elettromagnetica, e secondariamente perché contrasta apertamente [flies in the face of] con i ben stabiliti fatti dell'interferenza [123, p. 355].

Bisognerà attendere gli anni Trenta per vedere l'ipotesi dei quanti di luce, allora rinominati fotoni, entrare a far parte della conoscenza acquisita (sezione IV.8).

IV.4 Le unità discrete di energia di Joseph John Thomson

Nel 1907, Joseph John Thomson, sulla base di esperimenti di ionizzazione di gas con luce ultravioletta o raggi X, riprese una sua ipotesi secondo cui l'energia di un'onda elettromagnetica potrebbe non essere distribuita in modo continuo nello spazio ma suddivisa in unità non ulteriormente suddivisibili [124]. Questa ipotesi era assai diversa da quella dei quanti di luce. Secondo Thomson era possibile conciliare la teoria di Maxwell con una distribuzione discreta dell'energia elettromagnetica: egli cercò di sviluppare una versione dell'elettromagnetismo in cui l'energia era concentrata in 'tubi elettrici'. Siccome questi tubi non occupano l'intero spazio, la distribuzione dell'energia elettromagnetica deve necessariamente essere discontinua. Al contrario, Einstein concepiva l'ipotesi dei guanti di luce come alternativa all'elettromagnetismo maxwelliano la cui validità era confinata, quando confrontato con gli esperimenti, ai valori medi, rispetto al tempo, delle grandezze fisiche coinvolte. Einstein afferma in modo netto quale è, a suo giudizio, il dominio di applicazione della teoria di Maxwell e quali sono i fenomeni che non possono essere adeguatamente da essa descritti: i fenomeni di emissione ed assorbimento della luce. Un'altra differenza sostanziale tra le ipotesi di Einstein e Thomson, consiste nel fatto che, mentre Einstein scrisse la relazione fondamentale $E_{ph} = hv$ che lega l'energia del quanto di luce alla frequenza della radiazione elettromagnetica v, Thomson non specificò mai il valore della supposta unità indivisibile di energia elettromagnetica, non ostante il fatto che fosse convinto dell'esistenza di una relazione tra l'energia dell'unità indivisibile dell'energia e la frequenza dell'onda elettromagnetica [124, p. 368]. Così, mentre la relazione $E_{ph} = hv$ condusse Einstein a suggerire una legge riguardante l'effetto fotoelettrico (energia cinetica dell'elettrone emesso = $hv - \Phi$, dove Φ è l'energia necessaria per estrarre un elettrone), mostrando in questo modo la capacità predittiva dell'ipotesi dei quanti di luce, l'assenza di una analoga relazione quantitativa nell'ipotesi di Thomson limitò anche le possibilità di interpretazione di un esperimento di diffrazione eseguito con una sorgente di luce di bassa intensità, il primo di questo tipo nella storia della fisica.



Figura IV.4. Schema dell'apparato sperimentale di Taylor.

Thomson aveva infatti suggerito a Geoffrey Ingram Taylor, un suo giovane collaboratore, di eseguire un esperimento di diffrazione usando una sorgente di luce molto debole. L'idea era di verificare se la supposta natura discreta dell'energia della radiazione elettromagnetica avesse effetti sulla struttura o sulla visibilità delle frange di diffrazione previste dalla teoria ondulatoria della luce. Nell'esperimento di Taylor la sorgente era costituita da una sottile fenditura illuminata da una fiamma a gas la cui intensità era ridotta da filtri di vetro affumicati; l'elemento diffrattivo era un ago e il rivelatore una lastra fotografica (figura IV.4). Taylor fece cinque fotografie, la prima con la luce diretta della sorgente, le altre quattro con diversi filtri inseriti tra la fiamma a gas e la fenditura. Il tempo di esposizione della prima lastra fu determinato per tentativi; per quanto riguarda le altre, il tempo di esposizione era stabilito partendo da quello della prima lastra in modo inversamente proporzionale alle rispettive intensità. Il tempo di esposizione più lungo, fu di 2000 ore, cioè di circa tre mesi (durante questo periodo, Taylor fece un lungo viaggio in barca a vela). «In nessun caso, fu osservata una diminuzione della nitidezza delle frange, sebbene non tutte le lastre raggiungessero l'annerimento della prima» [125]. Secondo Taylor, l'intensità luminosa durante l'esposizione più lunga era di $I = 5 \times 10^{-6}$ erg s⁻¹ cm⁻², corrispondente a una energia per centimetro cubo di 1.6×10^{-16} erg. L'articolo si conclude con l'affermazione: «Secondo il signor J. J. Thomson, questo valore pone un limite superiore alla quantità di energia contenuta in una delle unità indivisibili sopra citate». È evidente che, sulla base della letteratura allora disponibile, sarebbe stata possibile una interpretazione più dettagliata dei dati sperimentali. Infatti, adottando il punto di vista di Einstein, si sarebbe potuto

sviluppare le seguenti considerazioni. Se, per rendere massima la densità dei quanti di luce, assumessimo per la loro energia quella corrispondente alla lunghezza d'onda massima della luce visibile (700 nm), troveremmo che il numero medio di quanti contenuti in un volume avente una base di 1 cm^2 e un'altezza di 100 cm sarebbe di circa 6.6×10^{-3} . Di conseguenza, l'esperimento di Taylor avrebbe dimostrato che le frange di diffrazione non erano modificate neppure quando, *in media*, meno di un quanto di luce per volta era in volo tra la fenditura e la lastra fotografica. Quello di Taylor è stato il primo di una serie di esperimenti, il numero medio di quanti in volo nell'apparato sperimentale era minore di uno. Tuttavia, ciò non significa che questi esperimenti siano stati eseguiti con un fotone alla volta. Inoltre, si deve tenere presente che le lastre fotografiche non sono rivelatori di fotoni singoli.

Le unità sensibili di una lastra fotografica sono cristalli, per esempio di AgBr, con dimensioni dell'ordine di qualche decimo di μm . Il bromuro di argento è un semiconduttore. Quando un fotone è assorbito da un cristallo di AgBr, un elettrone è liberato nella sua banda di conduzione e questo elettrone può essere catturato da uno ione di argento collocato in una posizione interstiziale, ione che si trasforma così in un atomo di argento. Un cristallo di AgBr, per essere rivelato dal processo di sviluppo della lastra, deve contenere più di quattro atomi di argento tra loro vicini in modo da formare un cluster. Pertanto, il cristallo deve assorbire un numero di fotoni maggiore (è necessario tenere conto dell'efficienza dell'intero processo). Per di più, la formazione di un cluster di atomi di argento deve avvenire in circa un secondo, che è la vita media di un atomo di argento isolato in una posizione interstiziale. Quindi, *una lastra fotografica è ben lungi dall'essere un rivelatore di un singolo fotone*.

IV.5 Ambigue fluttuazioni

Nel 1909, Einstein studia le fluttuazioni dell'energia della radiazione di corpo nero [126]. Se si assume come corretta la formula di Planck (IV.1), la fluttuazione dell'energia $\overline{\varepsilon^2}$ della radiazione la cui frequenza cade nell'intervallo compreso tra $v \in v + dv$ è data da (di nuovo, Einstein non usa la costante *h*):

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(E-\overline{E})^2} = \overline{E^2} - \overline{E}^2 = \\ = \left(u(v,T)hv + \frac{c^3}{8\pi v^2}u^2(v,T)\right)vdv$$
(IV.54)

130

ove *v* è il volume occupato dalla radiazione. Di fronte a questa formula, Einstein osserva che «*l'attuale teoria della radiazione è incompatibile con questo risultato*». Secondo Einstein, la teoria elettromagnetica di Maxwell - Lorentz («l'attuale teoria della radiazione") produce solo il secondo termine ¹⁵: questo termine sarebbe l'unico prodotto se, per la radiazione di corpo nero, si usasse la formula di Rayleigh - Jeans invece di quella di Planck. Inoltre, riferendosi al primo termine (l'unico che si ottiene partendo dalla formula di Wien (IV.3)), Einstein osserva:

...il primo termine, qualora fosse il solo presente, produrrebbe fluttuazioni [come] se la radiazione fosse composta da quanti puntiformi di energia hv che si muovono indipendentemente [l'uno dall'altro] [126, p. 366].

Questo lavoro di Einstein è considerato come l'origine della cosiddetta dualità onda-corpuscolo, la cui formulazione popolare consiste nell'affermare che, per esempio, la luce si comporta talora come una particella e tal altra come un'onda. Ritorneremo su questo argomento più avanti; qui ci limitiamo a mostrare che la fluttuazione dell'energia della radiazione di corpo nero può essere espressa in termini puramente corpuscolari, riscrivendo opportunamente la (IV.54), oppure ricavando una formula equivalente alla (IV.54) partendo dalla formula di Planck scritta in termini di accettori e quanti di luce (IV.5), senza, quindi, alcun riferimento alle onde elettromagnetiche. La fluttuazione dell'energia degli accettori di frequenza *v* può essere scritta nella forma:

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2 \frac{d\overline{E}}{dT}$$
(IV.55)

dove \overline{E} è l'energia media degli accettori di frequenza *v*. Siccome:

$$\overline{E} = \overline{n}(\nu, T)h\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$
(IV.56)

si ottiene, sviluppando i calcoli:

$$\overline{\varepsilon^2} = Z(\nu)(h\nu)^2 \overline{n}(\nu, T) [1 + \overline{n}(\nu, T)](\nu d\nu)$$
(IV.57)

Questa formula contiene solo l'energia dei fotoni hv e il loro numero medio $\overline{n}(v, T)$: la sola reminiscenza delle onde è dovuta alla presenza, non necessaria, della frequenza v, legata all'energia dei fotoni dalla relazione fondamentale E = hv. È infatti possibile riscrivere la (IV.57) in modo tale che vi

¹⁵Einstein corrobora questa affermazione sulla base di un'analisi dimensionale; la dimostrazione rigorosa è dovuta a Lorentz [127].

compaiano solo grandezze corpuscolari:

$$\overline{\varepsilon^2} = Z(E)E^2\overline{n}(E,T)[1+\overline{n}(E,T)]\nu\frac{dE}{h}$$
(IV.58)

In questa equazione non vi è alcuna dualità onda - corpuscolo, qualunque cosa questa dizione possa significare: la fluttuazione dell'energia è data dalla somma di due termini, uno proporzionale al numero medio di fotoni $\overline{n}(E, T)$, l'altro proporzionale al suo quadrato. Il primo termine è tipico di un sistema di particelle come quelle di un gas perfetto classico. La presenza del secondo termine ci ricorda che la statistica dei fotoni di un corpo nero non è come quella delle molecole di un gas perfetto classico. Infatti, i fotoni di un corpo nero obbediscono alla statistica di Bose, non a quella di Boltzmann: se le particelle sono distinguibili, lo scambio tra due di esse dà origine ad un nuovo stato del sistema di particelle (Boltzmann); se, invece, le particelle sono indistinguibili, lo scambio tra due di esse so stato (Bose). Inoltre, mentre nella statistica di Boltzmann si impone la conservazione del numero delle particelle, questa condizione viene lasciata cadere nella statistica di Bose.

IV.6 Quanti di luce senza quantità di moto

Nel 1921 comparve uno strano lavoro di Einstein riguardante la possibilità di un esperimento che potesse distinguere tra la descrizione ondulatoria e quella corpuscolare della luce [128]. Secondo Einstein, le predizioni delle due descrizioni sono in contraddizione se si effettua un esperimento ottico opportuno: si potrebbe quindi stabilire quale delle due descrizioni è corretta (oppure, nessuna delle due). Einstein inizia ricordando che se v_0 è la frequenza della radiazione emessa da un atomo in quiete, allora la frequenza v emessa da un atomo in moto con velocità v è data da (effetto Doppler; $v \ll c$):

$$v = v_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right) \tag{IV.59}$$

dove θ è l'angolo tra la direzione della radiazione emessa e la direzione della velocità dell'atomo nel sistema di riferimento dell'apparato di misura. Secondo Einstein, la (IV.59) è tipica della teoria ondulatoria. Infatti, Einstein scrive:

Se, d'altra parte, consideriamo la condizione di Bohr, fondamentale per la teoria dei quanti,

$$E_1 - E_2 = hv_1$$
 (IV.60)

che connette la variazione dell'energia dell'atomo con la frequenza emessa, siamo *propensi* ad attribuire una singola frequenza ad ogni processo elementare di emissione *anche quando l'atomo è in moto* [128, trad. it. p. 1; corsivo mio] ¹⁶.

Quindi, secondo Einstein, l'effetto Doppler è previsto solo dalla descrizione ondulatoria. L'esperimento ideato da Einstein prevede una deviazione del fascio di luce, da parte dell'apparato ottico usato, solo in presenza dell'effetto Doppler, cioè solo nel caso della descrizione ondulatoria.

L'ipotesi di partenza di Einstein è errata. Infatti, un anno dopo, Schrödinger mostrò che trattando l'emissione di un quanto di luce da parte di un atomo in moto sulla base delle leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto si ottiene la medesima formula per l'effetto Doppler previsto dalla descrizione ondulatoria (sezione IV.7.2). Quindi, non è possibile distinguere tra le due descrizioni della luce mediante l'esperimento ideato da Einstein ¹⁷.

L'articolo di Einstein si conclude con un'affermazione singolare: Einstein sostiene che l'ipotesi quantica (IV.60) secondo cui la frequenza della radiazione emessa da un atomo in moto non dipende dalla direzione di emissione «sarebbe in ottimo accordo con l'esistenza constatata da J. Stark dell'effetto Doppler» [128, trad. it. p. 2]. Einstein si riferisce al lavoro in cui Stark descrive la dipendenza della frequenza dalla direzione di emissione della luce emessa da atomi di idrogeno in moto [130], cioè ad un lavoro che descrive osservazioni sperimentali che sono in contrasto con l'assunto di Einstein ¹⁸. Il fatto che Einstein abbia ignorato il ruolo cruciale svolto dalla quantità di moto dei quanti di luce nei processi di emissione da parte di ato-

¹⁶Per ragioni di omogeneità con i simboli qui usati, ho scambiato i suffissi 1 e 2 in questa formula.

¹⁷L'esperimento, realizzato poco dopo da Hans Geiger and Walther Bothe dimostrò che la deviazione prevista da Einstein non sussiste. Inoltre, Paul Ehrenfest osservò che Einstein aveva usato onde piane invece di pacchetti d'onda spazialmente limitati. Effettuando questa correzione, l'effetto previsto inizialmente da Einstein scompare. Alla fine, Einstein riconobbe la correttezza dell'osservazione di Ehrenfest [129, p. 8 - 13].

¹⁸Klein osserva: «Alla fine del suo breve articolo, Einstein sottolineneò che, sebbene la frequenza del singolo processo elementare di emissione fosse indipendente dalla direzione, ciò non era in contraddizione con l'esistenza dell'effetto Doppler. Debbo confessare che non capisco questo commento. È vero che non era ancora stato dimostrato che l'effetto Doppler è valido anche sulla base della teoria quantica; ma Schrödinger avrebbe subito dopo fornito questa derivazione [41]...Siccome l'equazione (IV.59) sarebbe valida per entrambe le teorie, ondulatoria e quantica, l'effetto previsto da Einstein, se esistente, non avrebbe potuto distinguere tra di esse. Sembra che sia come se Einstein non avesse capito la questione e, per quanto ne so, nessun altro ha mai commentato questo punto [129, p. 9]».

mi è ancora più sorprendente se si tiene conto di quanto Einstein scriveva solo qualche anno prima:

Quasi tutte le teorie della radiazione termica si basano sullo studio dell'interazione tra radiazione e molecole. Ma, in generale, ci si accontenta di studiare lo scambio energetico, senza tener conto dello scambio della quantità di moto. Ci si sente giustificati a far così, perché la piccolezza delle quantità di moto trasferite dalla radiazione le spinge nello sfondo della realtà quando paragonate con altre cause generatrici di moto. Ma nell'analisi teorica quei piccoli effetti sono della stessa importanza di quelli, cospicui, del trasferimento di energia mediante radiazione, *poiché energia e impulso sono intimamente legati tra loro.* Pertanto, una teoria può essere considerata corretta solo quando essa mostra che le quantità di moto trasferite dalla radiazione alla materia conducono ai moti richiesti dalla teoria del calore [p. 232 - 233; corsivo mio][104].

Evidentemente, intorno agli anni Venti, il concetto di quanto di luce era ben lungi dall'essere integrato nella conoscenza acquisita.

IV.7 Effetto Doppler per i fotoni

... sulla base data da Einstein alla teoria della radiazione, il quanto emesso hv porta con sé sempre - e in particolare in ogni sistema di riferimento - l'impulso lineare hv/c, il massimo che in linea di principio possa essere associato a questo ammontare di energia. Nel seguito dimostriamo che il "salto di velocità" prodotto in tal modo per la condizione delle frequenze di Bohr dà proprio lo spostamento Doppler, e con tutte le sottigliezze che sono richieste dalla teoria della relatività [41, trad. it. p. 1].

Erwin Schrödinger

Nel 1922 comparve un articolo di Schrödinger dal titolo un po' criptico: 'Principio di Doppler e condizione delle frequenze di Bohr' [41]. Si tratta, in realtà, di un'elegante trattazione dell'effetto Doppler luminoso svolta considerando il processo di emissione di un quanto di luce da parte di un atomo in moto e basata sulle leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Un anno prima, Robert Emden, all'interno di un lungo lavoro sui quanti di luce, aveva ricavato la formula classica dell'effetto Doppler considerando l'assorbimento di quanti di luce da parte di una superficie in moto [131].

IV.7.1 Conservazione della quantità di moto

La trattazione di Emden è interessante per una serie di ragioni: è la prima applicazione, dopo quella di Stark (pagina 126), della quantità di moto lineare dei quanti di luce e la prima derivazione dell'effetto Doppler per i fotoni (seppure non relativistica); è adatta ad essere usata nell'insegnamento e – come mostrato di seguito – è facilmente estensibile al caso relativistico.



Figura IV.5. La superficie completamente assorbente *S* si muove con velocità *V* lungo la direzione positiva dell'asse *x* nel sistema di riferimento *O* del laboratorio. Un fascio di fotoni monocromatici di energia *hv* si muove lungo la direzione negativa dello stesso asse.

Si tratta di considerare un fascio di luce che incide perpendicolarmente su una superficie completamente assorbente e in moto rispetto al laboratorio (figura IV.5). Nel sistema di riferimento del laboratorio, abbiamo:

$$F_x = \frac{dP}{dt} = -n\frac{hv}{c}(c+V)S \tag{IV.61}$$

dove *P* è la quantità di moto della superficie *S* e *n* la densità dei fotoni ¹⁹. Nel sistema di riferimento *O'*, istantaneamente comovente con la superficie *S*, abbiamo invece ²⁰:

$$F'_{x} = \frac{dP'}{dt'} = -n'\left(\frac{h\nu'}{c}\right)cS'$$
(IV.62)

Poiché $F_x = F'_x$, S = S' e $n' = n\sqrt{1 - V^2/c^2}$, otteniamo immediatamente:

$$v = v' \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V/c}$$
(IV.63)

Se il fascio di fotoni si propaga lungo la direzione positiva dell'asse x, la formula finale è ancora la IV.63), ma con (-V/c) nel denominatore.

Consideriamo ora il caso più generale in cui il fascio di fotoni forma un angolo θ con l'asse *x* (figura IV.6).

¹⁹Naturalmente, l'equazione (IV.61) vale solo se si suppone che l'energia e la quantità di moto dei fotoni assorbiti non sia dispersa sotto forma di calore nella superficie assorbente.

²⁰Siccome, a causa dell'assorbimento dei fotoni, la superficie è in moto decelerato, è necessario considerare il SRI *istantaneamente* comovente con la superficie.



Figura IV.6. Ora il fascio di fotoni forma un angolo θ con l'asse *x*. La superficie *S*, in un secondo, assorbe tutti i fotoni contenuti nel volume $S \times (c | \cos \theta | + V)$.

In questo caso, abbiamo, nel sistema di riferimento del laboratorio:

$$F_x = \frac{dP_x}{dt} = -n\frac{hv}{c}S(c|\cos\theta| + V) = n\frac{hv}{c}S(c\cos\theta - V)$$
(IV.64)

perché la superficie *S* assorbe, nell'unità di tempo, tutti i fotoni contenuti nel volume $S \times (c |\cos \theta| + V)$ (figura IV.6). Invece, nel sistema di riferimento istantaneamente comovente con la superficie *S*:

$$F'_{x} = \frac{dP'}{dt'} = n'\frac{hv'}{c}(cS')\cos\theta'$$
(IV.65)

Poiché $F_x = F'_x$, S = S' e (equazione dell'aberrazione della luce):

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - B}{1 - B\cos\theta} \tag{IV.66}$$

otteniamo:

$$v = v' \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - (V/c)\cos\theta}$$
(IV.67)

che è l'equazione generale per l'effetto Doppler luminoso che si ricava considerando la luce come composta da onde elettromagnetiche.

Se la superficie *S* è investita da un'onda elettromagnetica piana, possiamo sostituire nelle equazioni precedenti $n(hv/c) \operatorname{con} < u > /c$. Di conseguenza, dalle equazioni (IV.64, IV.65) e dall'equazione dell'aberrazione (IV.66), si ottiene che:

$$\langle u \rangle = \frac{\langle u' \rangle}{1 - B\cos\theta}$$
 (IV.68)

Pertanto, l'energia media contenuta in un volume finito V è data da:

$$< U > = < u > V = \frac{< u' >}{1 - B\cos\theta} V' \sqrt{1 - V^2/c^2} = < U' > \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - B\cos\theta}$$
 (IV.69)

Questa equazione mostra che l'energia di un'onda elettromagnetica contenuta in un volume finito si trasforma, passando da un sistema inerziale ad un altro, come la frequenza dell'onda (IV.67). Si osservi come questo risultato sia stato attenuto applicando la conservazione della quantità di moto al processo di assorbimento di una porzione di un'onda piana da parte di una superficie completamente assorbente. Einstein, nel 1905, aveva invece ottenuto lo stesso risultato usando le equazioni di trasformazione dei campi [27, trad. it. p. 16].

Queste derivazioni dell'effetto Doppler per la luce nel vuoto, sono, forse, le più semplici tra quelle a disposizione. Ciò è particolarmente vero nel caso in cui il fascio di fotoni incide perpendicolarmente sulla superficie assorbente. È interessante osservare che, avendo scelto opportunamente l'orientazione degli assi, la trasformazioni della componente x della forza e quella della superficie S sono le stesse nella trattazione newtoniana e in quella relativistica. Ciò pone in evidenza il fatto che la differenza tra l'equazione classica e quella relativistica dell'effetto Doppler è, in questo caso, dovuta alla trasformazione della densità dei fotoni (e, quindi alla contrazione delle lunghezze e, quindi, alla dilatazione del tempo) e al ruolo dell'equazione dell'aberrazione della luce.

IV.7.2 Conservazione dell'energia e della quantità di moto

Nel lavoro del 1922, Schrödinger tratta solo il caso dell'emissione di un quanto di luce da parte di un atomo in moto e non usa in modo esplicito la differenza di energia ΔE tra i due livelli energetici coinvolti nell'emissione. Come documentato in [38, 39, 132], il lavoro di Schrödinger è stato completamente ignorato dai contemporanei ed anche oggi non fa parte del bagaglio culturale di molti fisici. Di seguito, illustriamo solo i risultati della trattazione: per i calcoli, si veda l'appendice B.3.

Consideriamo un atomo o nucleo che emette un fotone (figura IV.7). La conservazione dell'energia richiede che:

$$E_{ph} = \gamma_1 E_1^{emi} - \gamma_2 E_2^{emi} \tag{IV.70}$$

dove E_1^{emi} ed E_2^{emi} sono, rispettivamente, le energie a riposo dell'atomo prima e dopo l'emissione. Le due energie sono legate tra loro dalla relazione $E_1^{emi} - E_2^{emi} = \Delta E$, dove ΔE è la differenza di energia tra i due livelli della transizione. E_1^{emi} , E_2^{emi} e ΔE sono invarianti relativistici. La conservazione della quantità di moto lungo la direzione di emissione del fotone e lungo la



Figura IV.7. Emissione di un fotone da parte di un atomo (o nucleo) *A* in moto. Il fotone è emesso lungo la direzione $A \rightarrow O$. I suffissi 1 e 2 denotano grandezze fisiche prima e dopo l'emissione. Il fenomeno, che avviene nel piano individuato da \vec{v}_1 e *AO* è descritto nel SRI del laboratorio.

direzione ad essa perpendicolare si scrive:

$$\gamma_1 \frac{E_1^{emi}}{c^2} \nu_1 \cos \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2^{emi}}{c^2} \nu_2 \cos \theta_2 + \frac{E_{ph}}{c}$$
(IV.71)

$$\gamma_1 \frac{E_1^{emi}}{c^2} v_1 \sin \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2^{emi}}{c^2} v_2 \sin \theta_2$$
 (IV.72)

Si dimostra che l'energia E_{ph}^{emi} del fotone emesso è data da:

$$E_{ph}^{emi} = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2E_1^{emi}} \right) \frac{\sqrt{1 - B_1^2}}{1 - B_1 \cos \theta_1}$$

$$= \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2E_2^{emi}} \right) \frac{\sqrt{1 - B_2^2}}{1 - B_2 \cos \theta_2}$$
(IV.73)

dove $B_1 = v_1/c$, $B_2 = v_2/c$; $\theta_1 \in \theta_2$ l'angolo tra la velocità dell'atomo e la direzione di emissione del fotone prima e dopo l'emissione. Si noti come l'energia del fotone emesso possa essere espressa in funzione dei parametri B_1 , θ_1 prima dell'emissione o dei corrispondenti parametri dopo l'emissione. Ciò è dovuto al fatto che, dati i parametri prima dell'emissione, quelli dopo l'emissione sono determinati dalle leggi di conservazione.

Nel caso dell'assorbimento, si ottiene, dopo aver opportunamente ri-

scritto le equazioni di conservazione:

$$E_{ph}^{abs} = \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2E_1^{abs}} \right) \frac{\sqrt{1 - B_1^2}}{1 - B_1 \cos \theta_1}$$
$$= \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2E_2^{abs}} \right) \frac{\sqrt{1 - B_2^2}}{1 - B_2 \cos \theta_2}$$
(IV.74)

I termini $\Delta E/2E_1$ and $\Delta E/2E_2$ debbono essere trattati con attenzione. Consideriamo, per esempio, il caso dell'emissione:

$$\frac{\Delta E}{2E_1^{emi}} = \frac{\Delta E}{2(Mc^2 + \Delta E)}$$
(IV.75)

$$\frac{\Delta E}{2E_2^{emi}} = \frac{\Delta E}{2Mc^2} \tag{IV.76}$$

dove *M* è la massa dell'atomo non eccitato. Se $\Delta E \ll Mc^2$, possiamo porre $\Delta E/2E_1^{emi} = \Delta E/2Mc^2$. In generale, questa approssimazione è valida per transizioni tra due livelli atomici, ma non per transizioni tra due livelli nucleari. L'energia $E_R = \Delta E^2/2Mc^2$ è chiamata energia di rinculo. Esattamente, essa è l'energia cinetica di un atomo dopo l'assorbimento di un fotone se esso era a riposo prima dell'assorbimento; e, se vale la diseguaglianza $\Delta E \ll Mc^2$, è anche l'energia cinetica dell'atomo dopo l'emissione di un fotone se esso era a riposo prima dell'emissione. Se vale questa approssimazione, l'energia del fotone emesso (IV.73) può essere scritta come:

$$E_{ph}^{emi} = (\Delta E - E_R) \frac{\sqrt{1 - B_1^2}}{1 - B_1 \cos \theta_1} = \Delta E (1 - B_T) \frac{\sqrt{1 - B_1^2}}{1 - B_1 \cos \theta_1}$$
(IV.77)

dove $B_T = \Delta E/2Mc^2 = E_R/\Delta E$ è un parametro adimensionale. Non ostante il fatto che il suo valore sia molto piccolo, B_T svolge un ruolo importante in molti fenomeni fisici poiché esso controlla l'energia di rinculo dell'atomo e permette una comparazione a vista con i valori di B_1 (o B_2) quando entrambi compaiono nella stessa formula. Come mostrato in [40], ciò è particolarmente utile nella trattazione del raffreddamento di atomi mediante luce laser. Per quanto riguarda l'energia di rinculo, il suo valore è di importanza cruciale quando paragonato a quello della larghezza naturale della riga di emissione o assorbimento. Se l'energia di rinculo è minore della larghezza naturale della riga, un fotone emesso da un atomo a riposo può essere assorbito da un altro atomo a riposo (risonanza): ciò accade, usualmente, nelle transizioni atomiche. Se, invece, l'energia di rinculo è molto più grande della larghezza naturale della riga, l'assorbimento risonante di un fotone emesso è impossibile: ciò può accadere nel caso di transizioni nucleari. A partire dalla pagina 200, si dimostra come l'esistenza dell'energia di rinculo implichi una larghezza naturale della riga diversa da zero²¹.

Nel caso dell'assorbimento, si ha, esattamente:

$$E_{ph}^{abs} = (\Delta E + E_R) \frac{\sqrt{1 - B_1^2}}{1 - B_1 \cos \theta_1} = \Delta E (1 + B_T) \frac{\sqrt{1 - B_1^2}}{1 - B_1 \cos \theta_1}$$
(IV.78)

Considerando il caso di emissione di un fotone nella stessa direzione della velocità dell'atomo emettente, si può dimostrare che B_T agisce come un parametro di soglia. Infatti, si dimostra che:

$$E_{ph}^{emi} < \Delta E \quad \text{per} B_1 < B_T \tag{IV.79}$$

- $E_{ph}^{emi} = \Delta E \quad \text{per } B_1 = B_T$ $E_{ph}^{emi} > \Delta E \quad \text{per } B_1 > B_T$ (IV.80)
- (IV.81)

Invece, l'energia del fotone emesso nella direzione opposta a quella della velocità dell'atomo emettente è:

$$E_{ph}^{emi} = \Delta E (1 - B_T) \sqrt{\frac{1 - B_1}{1 + B_1}}$$
(IV.82)

che è sempre minore di ΔE .

La variazione dell'energia cinetica di un atomo dovuta all'emissione di un fotone è data da:

$$\Delta E_{K}^{emi} = (\gamma_{2} E_{2}^{emi} - E_{2}^{emi}) - (\gamma_{1} E_{1}^{emi} - E_{1}^{emi}) = \Delta E - E_{ph}^{emi}$$
(IV.83)

²¹La larghezza di una riga dipende da diversi contributi. La larghezza naturale è legata alla conservazione dell'energia durante i processi di emissione e assorbimento di fotoni; alla larghezza della riga contribuiscono l'effetto Doppler in emissione e assorbimento e le collisioni tra gli atomi. Quest'ultimo processo è osservabile solo a pressioni elevate. In generale, la larghezza naturale di una riga è mascherata dall'allargamento Doppler. Quest'ultimo può essere soppresso mediante tecniche spettroscopiche di 'saturazione' (saturation spectroscopy): così, sono state studiate, per esempio, le componenti della riga H_{α} dell'idrogeno [9, p. 355 - 357].

Pertanto, quando il fotone è emesso lungo la direzione di moto dell'atomo, la variazione dell'energia cinetica dell'atomo è:

$$\Delta E_K^{emi} > 0 \qquad \text{per}\,B_1 < B_T \tag{IV.84}$$

$$\Delta E_K^{emi} = 0 \qquad \text{per } B_1 = B_T \tag{IV.85}$$

$$\Delta E_K^{emi} < 0 \qquad \text{per}\,B_1 > B_T \tag{IV.86}$$

Infine, la variazione dell'energia cinetica dell'atomo quando un fotone viene emesso in direzione opposta a quella della velocità dell'atomo è sempre positiva.

Quando un atomo assorbe un fotone in una collisione frontale ($\theta_1 = \pi$), abbiamo:

$$E_{ph}^{abs} = \Delta E (1 + B_T) \sqrt{\frac{1 - B_1}{1 + B_1}}$$
(IV.87)

Pertanto, procedendo come nel caso dell'emissione, si ottiene:

$$E_{ph}^{abs} > \Delta E \quad \text{per}B_1 < B_T$$
 (IV.88)

$$E_{ph}^{abs} = \Delta E \qquad \text{per}B_1 = B_T \tag{IV.89}$$

$$E_{ph}^{abs} < \Delta E \qquad \text{per}B_1 > B_T \tag{IV.90}$$

Quindi, anche nel caso dell'assorbimento B_T opera come un parametro di soglia. Invece, quando il fotone assorbito viaggia nella stessa direzione dell'atomo, abbiamo:

$$E_{ph}^{abs} = \Delta E (1 + B_T) \sqrt{\frac{1 + B_1}{1 - B_1}}$$
(IV.91)

che è sempre maggiore di ΔE .

La variazione dell'energia cinetica dell'atomo dovuta all'assorbimento di un fotone è data da:

$$\Delta E_K^{abs} = (\gamma_2 E_2^{abs} - E_2^{abs}) - (\gamma_1 E_1^{abs} - E_1^{abs}) = E_{ph}^{abs} - \Delta E$$
(IV.92)

Quando l'atomo è in quiete prima dell'assorbimento, questa variazione di energia è uguale all'energia di rinculo E_R . In generale, nel caso di assorbimento di un fotone in una collisione frontale, valgono le relazioni (si deve tener conto delle equazioni (IV.88–IV.90)):

$$\Delta E_K^{abs} > 0 \quad \text{per}B_1 < B_T \tag{IV.93}$$

$$\Delta E_K^{abs} = 0 \quad \text{per}B_1 = B_T \tag{IV.94}$$

$$\Delta E_K^{abs} < 0 \qquad \text{per}B_1 > B_T \tag{IV.95}$$

Il caso $B_1 > B_T$ corrisponde al meccanismo fondamentale sfruttato nel raffreddamento di gas atomici con luce laser. Tuttavia, quando $B_1 < B_T$, la variazione dell'energia cinetica dell'atomo è positiva. Infine, la variazione dell'energia cinetica dell'atomo che assorbe un fotone in volo nella sua stessa direzione è sempre positiva. Come mostrato in [40], questi risultati, generalizzati al caso di emissione o di assorbimento di un fotone lungo una direzione qualsiasi, stanno alla base della trattazione teorica del raffreddamento di atomi (a due livelli) con luce laser.

La conservazione della quantità di moto nei fenomeni di emissione o assorbimento di fotoni da parte di atomi (o nuclei) svolge un ruolo fondamentale, nonostante che, in generale, la quantità di moto dei fotoni coinvolti sia assai piccola rispetto a quella degli atomi in moto. Per esempio, la quantità di moto di un fotone corrispondente alla riga $\lambda = 486.133 \times 10^{-9}$ nm dell'idrogeno è pari a 1.36×10^{-27} kgms⁻¹, mentre la quantità di moto termica dell'atomo a 300 K è pari a $\sqrt{3mk_BT} = 4.56 \times 10^{-24}$ kgms⁻¹. Invece, quando la velocità dell'atomo è dell'ordine della velocità di rinculo $v_R = \Delta E/mc$, le due quantità di moto (atomo e fotone) sono dello stesso ordine di grandezza. Questa situazione si verifica alle temperature prossime allo zero assoluto, raggiunte mediante i processi di raffreddamento degli atomi con luce laser (sezione IV.7.4).

Schrödinger, a conclusione del suo lavoro scriveva:

La velocità acquisita in seguito al rinculo è in generale assai piccola rispetto a quella termica, cioè la variazione di velocità dovuta all'emissione è relativamente assai piccola. Altrimenti sarebbe di notevole interesse verificare l'interpretazione quantistica dell'effetto Doppler qui esposta, come pure l'assai controversa presenza di un rinculo, così difficilmente conciliabile con l'ottica classica, mediante la larghezza sperimentale di righe spettrali adatte - se cioè essa corrisponde all'agitazione termica o è un po' più grande. Ma, come detto, anche sotto le condizioni più favorevoli – quando si faccia assorbire ultravioletto di Millikan estremo ($\lambda = 200$ Å) in un gas a bassa temperatura – la variazione della velocità per una molecola di gas ammonta tuttavia solo a pochi per mille della velocità termica media [41, trad. it. p. 5].

Lo sviluppo della tecnica, supportato da quello della conoscenza fisica, hanno permesso la verifica sperimentale del rallentamento di ioni in moto relativistico in anelli di accumulazione mediante assorbimento di fotoni [133]. Come mostrato in [40, p. 17 - 18], questo esperimento è perfettamente descritto dalle equazioni fondamentali dell'assorbimento o dell'emissione di un fotone da parte di un atomo in moto. D'altra parte, i processi di raffreddamento di gas atomici con luce laser ha permesso di studiare sperimentalmente situazioni in cui le quantità di moto degli atomi e dei fotoni coinvolti sono dello stesso ordine di grandezza. Sono stati quindi realizzati due esperimenti ipotizzati, ma ritenuti non realizzabili, da Schrödinger. Infine, si osservi come l'inciso «l'assai controversa presenza di un rinculo, così difficilmente conciliabile con l'ottica classica» si inserisca nel tormentato processo di acquisizione della quantità di moto dei fotoni che abbiamo sopra documentato.

Alcune delle equazioni che abbiamo discusso sono utilizzate per la verifica sperimentale indiretta della dilatazione del tempo [38]. In generale, siamo interessati ai parametri prima dell'emissione perché costituiscono, dal punto di vista sperimentale, i dati del problema. In questo caso, l'energia del fotone emesso può essere scritta in questa forma:

$$E_{ph}^{emi} = E_{ph}^{0} \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c)\cos\theta_1}$$
(IV.96)

dove E_{ph}^{0} è l'energia del fotone emesso quando l'atomo emettente è in quiete prima dell'emissione. Ponendo in questa equazione $E_{ph}^{emi} = hv$ e $E_{ph}^{0} = hv_{0}$, essa si trasforma nella ben nota equazione dell'effetto Doppler per la luce nel vuoto (II.23), che trascriviamo qui con una notazione leggermente diversa:

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c)\cos\theta_1}$$
(IV.97)

Se la (IV.97) è verificata sperimentalmente, affermiamo che anche la dilatazione del tempo lo è, perché il termine $\sqrt{1 - v_1^2/c^2}$ in esso contenuto è dovuto, come abbiamo mostrato, alla dilatazione del tempo.

In generale, l'equazione (IV.97) non è utilizzata così come è per verificare sperimentalmente la dilatazione del tempo. Per il semplice motivo che l'effetto Doppler del primo ordine dipendente da v_1/c oscurerebbe quello molto più piccolo dipendente da v_1^2/c^2 , a meno di usare una disposizione sperimentale che assicuri di misurare solo l'energia dei fotoni emessi dalla sorgente in direzione perpendicolare alla velocità degli atomi emettenti. Pertanto, gli sperimentatori hanno usato particolari configurazioni sperimentali per eliminare l'effetto Doppler del primo ordine. Una configurazione ampiamente usata è stata quella introdotta da Ives e Stilwell nel 1938 [134].

IV.7.3 Effetto Doppler su dispositivi rotanti

Un'altra configurazione sperimentale usata per verificare indirettamente la dilatazione del tempo utilizza i fotoni emessi da atomi (o nuclei) in direzione perpendicolare alla loro direzione di moto: in questo caso il denominatore della (IV.97) si riduce all'unità e, nella formula, rimane solo il termine quadratico in v_1/c . Questa configurazione è stata usata nel caso in cui la sorgente di fotoni era costituita da nuclei in solidi cristallini fissati su dispositivi rotanti: i fotoni studiati sono quelli emessi senza rinculo (effetto Mössbauer). Come mostrato in [39], la trattazione dell'effetto Doppler in dispositivi rotanti in termini di fotoni descrive compiutamente i fenomeni studiati.

Ci poniamo nel sistema di riferimento del laboratorio con l'origine nel centro del disco. Supponiamo che l'emettitore E e l'assorbitore A siano collocati sullo stesso raggio alle distanze R_E ed R_A dal centro del disco, con $R_A < R_E$. Nell'effetto Mössbauer, una frazione di nuclei emette fotoni senza rinculo dei nuclei stessi, perché la quantità di moto di rinculo viene trasferita all'intero cristallo. L'energia del fotone emesso quando il nucleo emettente è in quiete prima dell'emissione è data da:

$$E_{ph}^{0} = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2} \right) \tag{IV.98}$$

Nel caso della transizione a 14.4 keV del ${}^{57}Fe$ si ha: $\Delta E/2Mc^2 = 1.36 \times 10^{-7}$ se è il nucleo che rincula. Se, invece, rincula il cristallo, questo valore deve essere diviso per un fattore uguel al numero di nuclei contenuti nel campione. In questo caso, $E_{ph}^0 = \Delta E$.

Nel sistema di riferimento del laboratorio, l'energia dei fotoni emessi senza rinculo dall'emettitore è allora:

$$E_E = \Delta E \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 R_E^2}{c^2}} \tag{IV.99}$$

mentre l'energia che i fotoni debbono avere per essere assorbiti dall'assorbitore è:

$$E_A = \Delta E \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 R_A^2}{c^2}} \tag{IV.100}$$

Siccome $R_A < R_E$, l'energia dei fotoni emessi dall'emettitore è minore di quella necessaria affinché essi possano essere assorbiti dall'assorbitore. Pertanto, l'assorbitore deve essere mosso verso l'emettitore con una velocità v_M per rendere possibile, per effetto Doppler del primo ordine, l'assorbimento. Per rotazioni dell'ordine del migliaio di giri al secondo e distanze tra emettitore e assorbitore dell'ordine di 10 cm, v_M risulta essere dell'ordine del centimetro al secondo.

Siccome $\Omega R \ll c$, possiamo scrivere, sulla base delle (IV.99, IV.100):

$$\frac{E_A - E_E}{\Delta E} \approx \frac{\Omega^2}{2c^2} (R_E^2 - R_A^2) \tag{IV.101}$$

È questa equazione ad essere sottoposta a verifica sperimentale. Se emettitore e assorbitore si trovano agli estremi di un diametro del disco, i fotoni emessi senza rinculo possono essere assorbiti dall'assorbitore perché $E_E = E_A$, non ostante il fatto che la velocità relativa tra E ed A sia, nel sistema di riferimento dell'assorbitore $2V/(1 + V^2/c^2)$ con $V = \Omega R$. A prima vista, questo risultato sembra in contraddizione con il fatto che, nel sistema di riferimento di A, dovrebbe essere $E_A \neq E_E$ perchè la loro velocità relativa è diversa da zero. Dimostriamo che non è così perché bisogna tenere conto dell'aberrazione della luce. Nel sistema di riferimento dell'assorbitore, si ha:

$$E_A = E_E \frac{\sqrt{1 - w^2/c^2}}{1 - (w/c)\cos\theta}$$
(IV.102)

dove w è la velocità dell'emettitore nel sistema di riferimento dell'assorbitore e θ individua la direzione del fotone nel sistema di riferimento dell'assorbitore. Abbiamo:

$$\cos\theta = \frac{(V/c) + \cos\theta'}{1 + (V/c)\cos\theta'}$$
(IV.103)

dove θ' individua la direzione di propagazione del fotone nel sistema di riferimento del laboratorio e *V* è la velocità del laboratorio rispetto a *A*. Siccome $\theta' = \pi/2$, segue che cos $\theta = V/c$. In termini più fisici: se, nel sistema del laboratorio, un fotone viene emesso da *E* in direzione perpendicolare alla sua velocità, nel sistema di riferimento dell'assorbitore la direzione di propagazione del fotone sarà diversa da $\pi/2$ per cui sarà diverso da zero l'effetto Doppler del primo ordine, rappresentato, nella (IV.102) dal denominatore. Si tratta allora di dimostrare che numeratore e denominatore della (IV.102) sono uguali, cioè che l'effetto di dilatazione del tempo è annullato da un piccolo effetto Doppler del primo ordine. Dopo qualche manipolazione algebrica, il numeratore risulta uguale a:

$$\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} = \frac{c^2 - V^2}{c^2 + V^2}$$
(IV.104)

e, analogamente, si ottiene per il denominatore:

$$1 - \frac{w}{c}\cos\theta = 1 - \frac{w}{c}\frac{V}{c} = \frac{c^2 - V^2}{c^2 + V^2}$$
(IV.105)

Quindi, $E_A = E_E$.

IV.7.4 Raffreddamento di gas atomici con luce laser

L'idea di diminuire l'energia cinetica media degli atomi di un gas atomico – e, quindi, la temperatura del gas – illuminando il gas con fasci di fotoni contrapposti è dovuta a Hänsch e Schawlow e risale agli anni Settanta del secolo scorso [135]. Partendo da questo lavoro pionieristico, il raffreddamento di gas atomici con luce laser è diventato un vasto campo di ricerca con numerose applicazioni in fisica, chimica e biologia.

Quando un atomo assorbe un fotone, la sua energia cinetica cambia secondo le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto (sezione IV.7.2). In generale, ma non sempre, quando un atomo assorbe un fotone che viaggia in direzione opposta alla sua, l'energia cinetica dell'atomo diminuisce. Al contrario, se un atomo assorbe un fotone che lo sta inseguendo, la variazione dell'energia cinetica dell'atomo è sempre positiva. Sono quindi contemporaneamente presenti processi competitivi che tendono a diminuire o ad aumentare l'energia cinetica degli atomi. Ciò rende piuttosto complessa la trattazione teorica dell'intero processo. La cosiddetta teoria semi - classica del raffreddamento laser di gas atomici usa una descrizione ondulatoria della luce [136], e suppone di avere a che fare con una transizione atomica tra due livelli (donde l'abbreviazione un po' criptica, usata in letteratura, di 'atomi a due livelli').

Successivamente, sono comparse trattazioni quantiche, cioè trattazioni che considerano la luce come composta da fotoni; esse, inoltre, sono state caratterizzate dal fatto che utilizzano tutto il formalismo della meccanica quantica [137, 138]. In [40], il raffreddamento laser di atomi a due livelli è stato descritto adattando al contesto fisico specifico la trattazione dell'emissione o dell'assorbimento di un fotone, svolta nella sezione IV.7.2. L'idea di fondo è che sia necessario trattare la luce come composta da fotoni e che sia sufficiente usare le leggi di conservazione (insieme ad una ipotesi aggiuntiva che verrà specificata in seguito), senza far ricorso al formalismo della meccanica quantica. Riprendiamo qui solo i tratti essenziali del lavoro, senza sviluppare i calcoli: il lettore interessato li può trovare nell'articolo originale.



Figura IV.8. Lorentziana che descrive la larghezza naturale di una riga di emissione o di assorbimento di un atomo.

È innanzitutto necessario prendere atto che, dati due livelli energetici di un atomo, l'energia di transizione tra di essi ΔE non è esattamente definita, ma è invece descritta da una lorentziana:

$$L(\Delta E) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(\Delta E - \Delta E_M)^2 + (\Gamma/2)^2}$$
(IV.106)

Questa lorentziana è normalizzata in modo tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(\Delta E) d(\Delta E) = 1$$
 (IV.107)

ed è mostrata nella figura IV.8. Il valore massimo si ha per $\Delta E = \Delta E_M$ ed è uguale a 2/($\pi\Gamma$): Γ è la larghezza della funzione a metà altezza. Altro elemento importante è costituito dal fatto che l'energia dei fotoni usati è inferiore a quella massima prevista dalla larghezza naturale della riga: i fotoni sono cioè 'spostati verso il rosso' (red de - tuned).

Nella figura IV.9 è mostrato lo schema dell'apparato sperimentale. Per ragioni di simmetria, ci possiamo occupare solo di quanto succede lungo una delle tre direzioni tra loro ortogonali; per esempio, lungo l'asse x. Nella sezione IV.7.2, avevamo individuato un parametro adimensionale

$$B_T = \Delta E/2Mc^2 = E_R/\Delta E$$

 $(E_R \text{ è l'energia di rinculo})$ che funziona come parametro di soglia. Per tenere conto della larghezza naturale della riga, B_T sarà ora ridefinito come $B_T = \Delta E_M / 2Mc^2 = E_R / \Delta E_M$, dove ΔE_M è l'energia di transizione massima, mentre E_R è ridefinita come $E_R = \Delta E_M^2 / (2Mc^2)$. Introduciamo ora altri due



Figura IV.9. Schema di un apparato per il raffreddamento laser di un gas atomico. Gli atomi sono illuminati da una coppia, per ogni asse, di fasci contrapposti di fotoni monocromatici 'spostati verso il rosso' (red de - tuned).

parametri adimensionali, $B_D = \Gamma/\Delta E_M$ e $B_1 = v_1/c$, dove v_1 è il modulo della velocità dell'atomo prima dell'emissione o dell'assorbimento. Quindi, mentre B_T è una misura dell'energia di rinculo e B_D della larghezza della riga (entrambi in unità dell'energia massima di transizione ΔE_M), B_1 è una misura della velocità dell'atomo in unità di *c*.

Si utilizzano le seguenti ipotesi:

- I fotoni sono mono-energetici (monocromatici)
- L'intensità dei fasci laser è sufficientemente bassa da poter trascurare i processi di emissione stimolata
- Si considera solo il primo ciclo di assorbimento → emissione spontanea (ciclo di fluorescenza). Ciò significa che possiamo trascurare la probabilità che un fotone emesso da un atomo sia assorbito da un altro atomo. Questa condizione è assicurata se la densità del gas è sufficientemente bassa.

Quindi, il processo studiato consiste in:

- Assorbimento di un fotone da parte di un atomo
- Emissione spontanea del fotone assorbito lungo una direzione arbitraria

Siccome le velocità degli atomi – particolarmente quando si è vicini alla condizione finale stazionaria – sono piccole rispetto alla velocità della luce, useremo le equazioni della sezione IV.7.2 approssimate in modo tale da tener conto solo dei termini lineari nei parametri B_T , B_D , B_1 (approssimazione lineare).

L'energia dei fotoni spostati verso il rosso è scritta come:

$$E_{ph} = \Delta E_M (1 + B_T) (1 - \delta^*) \approx \Delta E_M (1 + B_T - \delta^*)$$
(IV.108)

dove $\Delta E_M(1 + B_T)$ è l'energia massima del fotone assorbito quando l'atomo è in quiete prima dell'assorbimento e δ^* è dello stesso ordine di grandezza o minore di B_D (o di B_T se $B_T > B_D$).

Nell'approssimazione lineare, un fotone descritto dalla (IV.108) può essere assorbito da un atomo in una collisione frontale se

$$\Delta E^A = \Delta E_M (1 - \delta^* + B_1) \tag{IV.109}$$

e la variazione dell'energia cinetica dell'atomo è data da:

$$\Delta E_K^A = \Delta E_M (B_T - B_1) \tag{IV.110}$$

Se $B_1 > B_T$, l'assorbimento del fotone riduce l'energia cinetica dell'atomo: questo è il meccanismo che conduce al raffreddamento del gas. Se $B_1 < B_T$, l'assorbimento del fotone incrementa l'energia cinetica dell'atomo: questo è uno dei meccanismi che tendono a riscaldare il gas. Come già sappiamo, B_T è un parametro di soglia. La velocità di soglia è data da:

$$\nu_T = \frac{\Delta E_M}{2Mc} = \frac{\nu_R}{2} \tag{IV.111}$$

dove v_R è la velocità di rinculo.

Lo stesso atomo con lo stesso parametro di velocità B_1 può assorbire un fotone che viaggia nella sua stessa direzione. In questo caso, l'energia di transizione deve soddisfare l'equazione:

$$\Delta E^P = \Delta E_M (1 - \delta^* - B_1) \tag{IV.112}$$

e la variazione dell'energia cinetica dell'atomo è data da:

$$\Delta E_K^P = \Delta E_M (B_T + B_1) \tag{IV.113}$$

Questa variazione è sempre positiva: anche questo processo di assorbimento tende a riscaldare il gas. Dopo aver studiato i processi di assorbimento di un fotone spostato verso il rosso, dobbiamo valutare la variazione media di energia cinetica di un atomo quando esso emette un fotone di fluorescenza in una direzione arbitraria. Si dimostra che essa è uguale all'energia di rinculo E_R .

Nella approssimazione lineare, l'energia di un fotone emesso si ottiene dalle equazioni (IV.77) con l'approssimazione $\sqrt{1-B_1^2} \approx 1-B_1^2/2$ e tenendo conto solo dei termini lineari nei *B* (*B*_T, *B*_D, *B*₁):

$$E_{ph} = \Delta E(1 - B_T + B_1 \cos \theta_1) = \Delta E(1 + B_T + B_2 \cos \theta_2)$$
(IV.114)

L'energia media di un fotone emesso da un atomo lungo una direzione arbitraria è data da (se ogni direzione di emissione ha la stessa probabilità):

$$\langle E_{ph} \rangle = \Delta E(1 - B_T) + \Delta E B_1 \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta_1 (2\pi \sin\theta_1 d\theta_1)$$

$$(IV.115)$$

$$= \Delta E(1 - B_T) + \frac{B_1 \Delta E}{4} [\sin^2\theta_1]_0^{\pi} = \Delta E(1 - B_T)$$

Cioè, nell'approssimazione lineare, l'energia media di un fotone emesso è uguale a quella del fotone emesso quando l'atomo emettente è in quiete prima dell'emissione.

La variazione media dell'energia cinetica dell'atomo dovuta all'emissione di un fotone lungo una direzione arbitraria, è data da:

$$<\Delta E_K > = \Delta E - < E_{ph} > = B_T \Delta E \approx B_T \Delta E_M = E_R$$
 (IV.116)

Questa variazione di energia cinetica è positiva, indipendente dalla velocità dell'atomo, ed uguale all'energia di rinculo.

Quindi, l'emissione di un fotone di fluorescenza costituisce, in media, un altro processo di riscaldamento del gas.

Dobbiamo ora considerare un intero ciclo di fluorescenza (assorbimento ed emissione del fotone assorbito). Se il fotone è assorbito in una collisione frontale, la variazione media dell'energia cinetica dell'atomo è data da:

$$<\Delta E_K^A > = \Delta E_M (B_T - B_1) + E_R = \Delta E_M (2B_T - B_1)$$
 (IV.117)

Questa variazione è negativa (raffreddamento) per $B_1 > 2B_T$, nulla per $B_1 = 2B_T$ e positiva per $B_1 < 2B_T$, dove B_1 è il parametro di velocità dell'atomo prima dell'assorbimento.

Invece, se il fotone assorbito viaggia nella stessa direzione dell'atomo, la variazione media della sua energia cinetica dovuta all'intero ciclo di fluorescenza è sempre positiva (riscaldamento) ed è uguale a:

$$<\Delta E_K^P >= \Delta E_M (2B_T + B_1) \tag{IV.118}$$

Queste due ultime equazioni contengono tutte le informazioni necessarie per descrivere il raffreddamento laser di gas di atomi 'a due livelli'.

Dato un atomo con parametro di velocità B_1 esso può assorbire un fotone di energia definita sia che esso appartenga all'uno o all'altro dei due fasci contrapposti. È qui che interviene la larghezza naturale della riga: si tratta di associare alle due possibili energie di transizione di assorbimento ΔE^A e ΔE^P le probabilità di transizione fornite dalla lorentziana normalizzata che descrive la larghezza naturale della riga (equazione IV.106). Si dimostra che i fasci laser diminuiscono l'energia cinetica media degli atomi il cui parametro di velocità è maggiore di B_1 ed aumentano l'energia cinetica degli atomi il cui parametro di velocità è minore di B_1 , con:

$$B_1 = \frac{1}{2} \sqrt{B_T \frac{B_D^2 + 4{\delta^*}^2}{\delta^* - B_T}}$$
(IV.119)

Si noti che deve essere $\delta^* < B_T$, cioè che l'energia del fotone deve essere minore di ΔE_M (spostato verso il rosso). Il valore minimo B_{1min} di B_1 si ha per:

$$\delta^* = B_T + \frac{1}{2}\sqrt{4B_T^2 + B_D^2}$$
 (IV.120)

ed è dato da:

$$B_{1min} = B_T \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + \frac{B_D^2}{4B_T^2}}}$$
(IV.121)

Questi risultati sono validi per ogni valore del rapporto $B_D/B_T = \Gamma/E_R$. È interessante considerare tre casi: $B_D \gg B_T$, $B_D = B_T e B_D \ll B_T$. Nel primo caso, B_{1mim} si ha per $\delta^* \approx B_D/2$; nel secondo per $\delta^* = 2.12 B_T$; nel terzo $\delta^* \approx 2B_T$.

Nell'approssimazione lineare, l'assorbimento di un fotone dipende solo dalla componente della velocità dell'atomo v_x . Poiché il gas atomico è sottoposto all'azione di due fasci laser contrapposti, la distribuzione di v_x è simmetrica rispetto a $v_x = 0$: pertanto, gli atomi nello stato stazionario possono essere descritti come se tutti avessero la componente della velocità lungo l'asse *x* uguale a $v_x = \pm v_{x_{rms}}$. Quando questa velocità è uguale a $\pm cB_1$, l'energia cinetica media degli atomi non può essere ulteriormente ridotta. Pertanto, ponendo $cB_1 = v_{x_{rms}}$, otteniamo:

$$\langle E_K \rangle = \frac{1}{2}M \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}Mc^2 B_1^2 = \frac{1}{16}E_R \frac{B_D^2 + 4{\delta^*}^2}{B_T(\delta^* - B_T)}$$
 (IV.122)

E la più piccola energia cinetica media ottenibile sarà:

$$\langle E_K \rangle_{min} = \frac{1}{2} M c^2 B_{1min}^2 = \frac{1}{2} E_R \left(1 + \sqrt{1 + \frac{B_D^2}{4B_T^2}} \right)$$
 (IV.123)

Questa equazione implica che $\langle E_K \rangle_{min} \rightarrow E_R$ quando $B_D/B_T \rightarrow 0$ (figura IV.10).



Figura IV.10. L'energia cinetica media degli atomi tende a E_R quando Γ/E_R tende a zero.

In tre dimensioni, l'energia cinetica media minima è tripla di quella qui calcolata per una sola dimensione.

Tornando al caso unidimensionale, è interessante verificare in modo diretto come l'energia minima raggiungibile sia uguale all'energia di rinculo E_R . Supponiamo che un atomo abbia raggiunto una energia uguale a E_R . Ciò significa che la sua velocità è uguale a $v_R = 2cB_T$, cioè che il suo parametro di velocità è uguale a $2B_T$. Secondo la (IV.117), la variazione media dell'energia cinetica dell'atomo dovuta ad un intero ciclo di fluorescenza (assorbimento di un fotone in un urto frontale seguito dall'emissione di un fotone in direzione arbitraria) è data da:

$$\Delta E_K = \Delta E_M (2B_T - B_1) = \Delta E_M (2B_T - 2B_T) = 0$$
 (IV.124)

Cioè l'energia media dell'atomo non può più essere diminuita. Si noti come questo risultato sia indipendente dalla posizione $v =_{rms} = cB_1$ che conduce alla equazione finale descrivente il processo di raffreddamento (IV.123). In altri termini: il limite E_R discende direttamente ed unicamente dalle leggi di conservazione.

I risultati ottenuti debbono essere confrontati con la teoria semi - classica e con le teorie quantistiche del raffreddamento laser di gas atomici. La teoria semi - classica è sviluppata supponendo che la quantità di moto dei fotoni sia trascurabile rispetto a quella degli atomi.



Figura IV.11. Rapporto tra l'energia cinetica media minima $\langle E \rangle_{min}^{SC}$ prevista dalla teoria semi - classica e quella $\langle E \rangle_{min}^{CL}$ prevista dalle leggi di conservazione (presente trattazione) in funzione del rapporto Γ/E_R tra la larghezza naturale della riga Γ e l'energia di rinculo E_R . La teoria semi - classica prevede che l'energia cinetica media degli atomi tenda a zero al tendere a zero della larghezza della riga, cioè al tendere a zero del parametro B_D . Questo risultato, fisicamente non accettabile, è dovuto al fatto che la teoria semi - classica ignora il ruolo svolto dall'energia di rinculo E_R .

Questa approssimazione implica che l'energia cinetica degli atomi sia molto più grande dell'energia di rinculo E_R . Pertanto, nella teoria semi - classica, il processo di raffreddamento dipende solo dalla larghezza naturale della riga Γ , cioè, nel linguaggio della nostra trattazione, dal parametro B_D .

Nella figura IV.11 le predizioni della presente trattazione sono confrontati con quelle della teoria semi - classica. Le due teorie sono praticamente indistinguibili per grandi valori del rapporto B_D/B_T , cioè del rapporto tra la larghezza della riga e l'energia di rinculo dell'atomo. L'energia cinetica media minima è sistematicamente inferiore per la teoria semi - classica; inoltre, quest'ultima prevede che essa tenda a zero al tendere a zero della larghezza



Figura IV.12. Confronto tra la teoria semi - classica (linea tratteggiata) e la presente trattazione nel caso della transizione a 388.98 nm dell'⁴ He^* . Il rapporto tra l'energia cinetica media degli atomi e la loro energia di rinculo è calcolato in funzione del rapporto δ^*/B_D che rappresenta una misura della deviazione verso il rosso (rispetto a ΔE_M) dell'energia dei fotoni. L'asterisco posto accanto al simbolo dell'elio ci ricorda che il livello di partenza della transizione è un livello metastabile.

della riga (al tendere a zero del parametro B_D). Nella figura IV.12 le predizioni di questa trattazione e della teoria semi - classica sono confrontate nel caso dell'elio. Siccome il rapporto $B_D/B_T = \Gamma/E_R$ è piccolo, l'energia di rinculo gioca un ruolo non trascurabile. Quindi, le differenze tra le predizioni della teoria semi - classica quelle della presente trattazione sono rilevanti.

Per quanto riguarda le trattazioni che usano il formalismo della meccanica quantica, abbiamo citato i lavori di Wineland e Itano [137] e quello di Castin et al [138]. I primi, affrontano inizialmente il problema sulla base delle leggi di conservazione, come abbiamo fatto nella nostra trattazione. Tuttavia, essi assumono che la distribuzione delle velocità degli atomi lungo una determinata direzione sia sempre una gaussiana e trovano che, quando la larghezza della riga è molto più piccola dell'energia di rinculo, è possibile ottenere energie medie degli atomi inferiori all'energia di rinculo. Questo risultato, è in contrasto con il risultato richiamato poco sopra secondo cui, per le leggi di conservazione, l'energia minima raggiungibile è E_R . Winelad e Itano, assumendo che la distribuzione delle velocità degli atomi lungo una determinata direzione sia una gaussiana, assumono implicitamente che la distribuzione delle velocità degli atomi sia quella tipica dell'equilibrio termodinamico; ma questa assunzione non può essere in generale valida per un insieme di atomi sottoposti all'azione di luce laser. Questa assunzione è quindi responsabile del contrasto tra il risultato di Wineland e Itano e quello basato unicamente sulle leggi di conservazione. L'ulteriore trattazione di Wineland e Itano che utilizza il formalismo della meccanica quantica non altera in modo sostanziale i risultati da loro ottenuti sulla base delle leggi di conservazione.

Castin et al. non fanno alcuna ipotesi sulla distribuzione delle velocità degli atomi; anche loro trovano che, per larghezze di riga molto piccole, l'energia cinetica media minima risulta minore dell'energia di rinculo ed uguale a $\approx E_R/2$. Questo risultato, come quello analogo, di Wineland e Itano è in contrasto con le leggi di conservazione che, come abbiamo visto, implicano che l'energia cinetica media minima non possa essere inferiore all'energia di rinculo.

IV.8 Effetto Compton

Il cosiddetto effetto Compton consiste nella diffusione di raggi X o gamma da parte della materia con aumento della loro lunghezza d'onda. Le prime osservazioni di questo fenomeno risalgono ai primi anni del Novecento [139, 129, 91]. I tentativi di spiegazione basati sulla teoria elettromagnetica fallirono perché essa prevede che la diffusione dei raggi X o gamma da parte della materia sia dovuta agli elettroni accelerati dal campo elettrico dell'onda incidente: gli elettroni accelerati producono onde elettromagnetiche aventi la stessa frequenza dell'onda incidente, quindi senza alcuna variazione di lunghezza d'onda. Compton provò anche ad ipotizzare che le dimensioni degli elettroni fossero dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda dell'onda incidente, in modo da poter fungere da elementi di diffrazione [91, p. 168]. Alla fine, Compton si risolse a trattare l'argomento usando la descrizione corpuscolare della luce [140]²². Tuttavia, l'impianto complessivo dei lavori di Compton sull'effetto che porta il suo nome prevede l'uso di entrambe le descrizioni. Per rendersi conto di questa commistione è sufficiente considerare l'apparato sperimentale usato e la sua descrizione teorica. I raggi X prodotti da un anticatodo di molibdeno, dopo aver attraversato alcune fenditure, incidevano sul bersaglio, costituito da grafite [142]. I raggi X diffusi erano analizzati mediante uno spettrometro di Bragg, permettendo così la misura della loro lunghezza d'onda. La descrizione teorica dell'esperimento prevede quindi che i raggi X incidenti siano descritti come

²²Anche Debye era giunto alla stessa trattazione [141]. L'articolo di Debye fu pubblicato prima di quello di Compton. A Compton fu assegnato il premio Nobel per la fisica nel 1927 «per la scoperta dell'effetto che porta il suo nome». A differenza di Debye, Compton, oltre che proporre la teoria quantica dell'effetto, realizzò esperimenti fondamentali.

se fossero costituiti da fotoni, mentre l'interazione dei raggi X diffusi con lo spettrometro è descritta come se i raggi X fossero costituiti da onde elettromagnetiche. Prima di Compton, le leggi di conservazione erano state usate Stark per descrivere l'emissione di quanti X (pagina 126) e da Schrödinger per trattare l'emissione di un quanto di luce da parte di un atomo (sezione IV.7.2); Compton non cita né Stark né Schrödinger.



Figura IV.13. Effetto Compton. Un fotone con quantità di moto $p_i = hv_i/c$ interagisce con un elettrone in quiete. $p_e e p_f = hv_f/c$ rappresentano, rispettivamente, la quantità di moto dell'elettrone dopo l'interazione e quella del fotone diffuso.

Un quanto X o gamma avente quantità di moto $p_i = hv_i/c$ interagisce con un elettrone libero e in quiete posto in O (figura IV.13). Il risultato finale di questa interazione è dato da un quanto diffuso avente quantità di moto $p_f = hv_f$ e dal rinculo dell'elettrone che acquisisce una quantità di moto p_e . La trattazione si basa unicamente sulle leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto e non fa alcuna ipotesi su come l'interazione fotone - elettrone abbia luogo. La geometria del fenomeno è planare ed il piano è individuato dai vettori delle quantità di moto del fotone incidente e diffuso: per la conservazione della quantità di moto, anche la quantità di moto di rinculo dell'elettrone giace nello stesso piano. La conservazione dell'energia richiede che:

$$hv_i + m_e c^2 = hv_f + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$
 (IV.125)

dove si è usata la relazione (B.31, pagina 271) per l'energia dell'elettrone. La conservazione della quantità di moto si scrive:

$$\vec{p}_e = \vec{p}_i - \vec{p}_f \tag{IV.126}$$

dove con $\vec{p}_i \in \vec{p}_f$ si è indicata la quantità di moto del fotone prima e dopo l'interazione, rispettivamente. Elevando al quadrato la (IV.126) e moltiplicando entrambi i membri per c^2 , si ottiene:

$$(p_e c)^2 = (h v_i)^2 + (h v_f)^2 - 2h^2 v_i v_f \cos\theta$$
(IV.127)

Elevando al quadrato la (IV.125) si ottiene invece:

$$(p_e c)^2 = (hv_i)^2 + (hv_f)^2 - 2h^2 v_i v_f + 2m_e c^2 (hv_i - hv_f)$$
(IV.128)

Uguagliando i secondi membri di queste equazioni si perviene alla relazione:

$$(1 - \cos\theta) = \frac{m_e c}{h} \left(\frac{c}{v_f} - \frac{c}{v_i} \right)$$
(IV.129)

che, espressa in termini delle lunghezze d'onda, dà:

$$\lambda_f - \lambda_i = \Delta \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \tag{IV.130}$$

La grandezza

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2.426 \times 10^{-12} \, m \tag{IV.131}$$

si chiama lunghezza d'onda di Compton. $\Delta\lambda$ non dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione incidente, ma solo dall'angolo θ di diffusione del fotone. Inoltre, la variazione di lunghezza d'onda è nulla per $\theta = 0$ e massima ed uguale a λ_C per $\theta = \pi/2$.

L'energia cinetica di rinculo dell'elettrone è data da:

$$E_{cin} = h\nu_f - h\nu_i \tag{IV.132}$$

Ricavando v_f dalla (IV.129) e sostituendola nella (IV.132), si ottiene, dopo qualche passaggio:

$$E_{cin} = hv_i \frac{2\alpha \sin^2(\theta/2)}{1 + 2\alpha \sin^2(\theta/2)}$$
(IV.133)

dove il parametro adimensionale α è dato da:

$$\alpha = h v_i / mc^2 \tag{IV.134}$$

Vale inoltre la relazione:

$$\tan\phi = -\frac{1}{1+\alpha}\tan\frac{\theta}{2} \tag{IV.135}$$

dove ϕ è l'angolo tra \vec{p}_e e \vec{p}_f . Combinando le due ultime equazioni si ottiene l'energia cinetica di rinculo dell'elettrone in funzione dell'angolo ϕ :

$$E_{cin} = h\nu_i \frac{2\alpha \cos^2 \phi}{1 + \alpha^2 - \alpha^2 \cos^2 \phi}$$
(IV.136)

Prima della spiegazione di Compton, un quanto di luce poteva essere generato o assorbito solo per intero: quindi, un quanto poteva cedere la sua energia alla materia solo interamente. Questo avviene, per esempio nel caso dell'effetto fotoelettrico o nei processi di emissione o assorbimento di un quanto da parte di un atomo o di un nucleo (sezione IV.7.2). Nella diffusione di quanti X o gamma invece, un quanto può cedere alla materia anche solo una parte della sua energia. Si osservi inoltre come un elettrone, libero e inizialmente in quiete, non possa assorbire interamente un quanto di luce: le leggi di conservazione non lo permettono. Supponiamo che questo processo sia possibile e che, al contempo, valgano le leggi di conservazione. Se indichiamo con p_e la quantità di moto dell'elettrone dopo l'urto, abbiamo, per la conservazione della quantità di moto:

$$p_e = \frac{hv}{c} \tag{IV.137}$$

e, per la conservazione dell'energia:

$$hv + m_e c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$
 (IV.138)

Ponendo in questa equazione $hv = p_e c$ ed elevando al quadrato entrambi i membri, si ottiene:

$$2m_e p_e c^3 = 0$$
 (IV.139)

Essendo, per ipotesi, $p_e \neq 0$ questa equazione non può essere mai soddisfatta. Ne segue che, siccome pensiamo che le leggi di conservazione siano valide, il processo ipotizzato non è possibile.

Compton ha sviluppato una teoria del suo effetto nel caso di un elettrone appartenente ad un atomo [143]. In questo caso, l'energia del quanto incidente può diminuire solo quando l'elettrone coinvolto nel processo è estratto dall'atomo: l'energia e la quantità di moto perse dal quanto si ripartiscono tra l'elettrone estratto e lo ione prodotto. La descrizione semplificata dell'effetto Compton, basata sull'ipotesi che l'elettrone coinvolto sia libero e in quiete, descrive gli aspetti essenziali del fenomeno. In particolare, nel caso in cui non ci sia deviazione del fotone incidente ($\theta = 0$) non vi è alcuna interazione tra fotone ed elettrone: il fotone prosegue imperturbato e l'elettrone rimane a riposo ($E_{cin} = 0$, equazione (IV.133)). Se l'elettrone coinvolto è dotato di una velocità iniziale, si dimostra che è possibile l'effetto Compton inverso consistente nel trasferimento di energia e quantità di moto dall'elettrone al fotone. Anche in questo caso la geometria del fenomeno è planare ed il piano è individuato dai vettori delle quantità di moto del fotone incidente e dell'elettrone prima dell'interazione: per la conservazione della quantità di moto, anche la quantità di moto del fotone diffuso e quella dell'elettrone dopo l'interazione giacciono nello stesso piano. Naturalmente, questa trattazione generale deve contenere come caso limite quella svolta da Compton (elettrone in quiete). L'effetto Compton inverso richiede che l'elettrone abbia velocità ultra - relativistiche ed è importante in astrofisica [144, p. 197 - 199].

I risultati sperimentali ottenuti da Compton, usando i raggi X prodotti da un anticatodo di molibdeno e la grafite come bersaglio, furono trovati in ottimo accordo con la teoria. Compton commentò i risultati ottenuti da lui e da altri con queste parole:

Questo notevole *accordo tra esperimento e teoria* indica chiaramente che la diffusione è un fenomeno quantico e che esso può essere spiegato senza introdurre alcuna nuova ipotesi circa le dimensioni dell'elettrone o qualche nuova costante; inoltre che un quanto di radiazione trasporta quantità di moto oltre che energia [140, p. 484; corsivo originale].

L'affermazione che «la diffusione è un fenomeno quantico» non impedisce a Compton di descrivere il fenomeno in termini ondulatori quando si tratta di descrivere l'interazione della radiazione diffusa con lo spettrometro di Bragg per verificare l'equazione fondamentale della sua trattazione (IV.130). Non solo: Compton osserva che le predizioni della sua teoria corpuscolare sono riprodotte se si suppone che la radiazione diffusa sia irraggiata *classicamente* da un elettrone in moto con velocità $v_{eff} = c\alpha/(1 + \alpha)$, con α dato dalla (IV.134), lungo la direzione della radiazione incidente. Inoltre, Compton calcola l'intensità della radiazione diffusa dall'elettrone in moto con velocità v_{eff} e suppone che essa sia la stessa anche nel caso della trattazione corpuscolare. Scrive Compton:

Sembra ovvio che, poiché questi due metodi di calcolo producono la stessa variazione della lunghezza d'onda [in funzione dell'angolo di diffusione], essi debbano anche produrre la medesima variazione dell'intensita del fascio diffuso [in funzione dello stesso angolo] [140, p. 491].

Compton precisa che non è stato in grado di dimostrare questa assunzione; tuttavia, suppone che sia corretta e procede al calcolo dell'intensità della radiazione diffusa. I risultati ottenuti paiono in accordo con i dati sperimentali disponibili. Compton non parla mai di 'esistenza' dei quanti di luce; egli sembra invece implicitamente adottare l'atteggiamento più volte assunto da Einstein: 'la radiazione si comporta come se essa consista di...' Questa cautela ontologica di Compton è verosimilmente suggerita dalla consapevolezza della necessità di dover usare, a seconda dei casi, la descrizione ondulatoria o quella corpuscolare della luce.

Nonostante il successo della spiegazione di Compton, l'anno successivo, Bohr, Hendrik Kramers e John Slater (BKS) pubblicarono un articolo in cui, pur di evitare l'uso del quanto di luce, proponevano l'ipotesi secondo cui la conservazione dell'energia non è richiesta nei singoli processi microscopici. ma deve essere soddisfatta solo in media [145]. Walther Bothe e Hans Geiger, usando contatori Geiger, verificarono poco dopo che l'elettrone di rinculo e il fotone diffuso erano osservati in un intervallo di tempo $\leq 10^{-3}$ s, mentre, nell'ipotesi di BKS la correlazione tra questi due eventi sarebbe dovuta essere solo statistica [146]²³. Anche Compton e Alfred Simon, confermarono, usando una camera a nebbia, la correlazione tra rinculo dell'elettrone e quanto diffuso [148]²⁴. Mentre la spiegazione di Compton e Debye dell'effetto Compton era una teoria quantitativamente definita, la proposta di BKS era soltanto un programma di ricerca. Non si confrontavano quindi due teorie diverse, ma due immagini del Mondo, una che contemplava la possibile esistenza dei quanti di luce, l'altra che la negava. Felix Klein ha descritto così la questione:

Poiché questo approccio portò ad una descrizione coronata da successo dell'effetto Compton, molti fisici considerarono l'accordo tra teoria ed esperimento come «una definitiva evidenza dell'esistenza dei quanti di luce» come si espresse J. H. Van Vleck. Alcuni erano desiderosi di andare oltre. Arnold Sommerfeld, per esempio, scrisse a Compton che la sua scoperta suonava «le campane a morto della teoria ondulatoria della radiazione». Anche la radiazione che si propaga liberamente sembrava avere proprietà corpuscolari, come mostrato dalla semplice teoria basata soltanto sulle leggi di conservazione. L'effetto Compton fu generalmente considerato essere il tipo di esperimento cruciale che Einstein aveva perseguito [129, p. 13 - 14].

In questo passo di Klein si possono rintracciare elementi di immagini del Mondo («esistenza dei quanti di luce»), falsificazioni di teorie («le campane a morto della teoria ondulatoria della radiazione») ed un chiaro riferimento al tentativo di Einstein di discriminare tra le due descrizioni, ondulatoria e corpuscolare, della luce (sezione IV.6). Anche la ricostruzione delle intricate

²³Nel 1955, questo intervallo di tempo è stato ridotto a $\leq 10^{-11}$ s [147].

²⁴In entrambi gli esperimenti, il quanto diffuso non era misurato direttamente; in sua vece, era osservato il fotoelettrone da esso prodotto.

vicende dei quanti di luce da parte di Pais [109] ruota intorno alla possibile *esistenza* dei quanti di luce.

La scoperta dell'effetto Compton ha sicuramente contribuito alla accettazione, da parte della comunità dei fisici, del concetto di guanto di luce. Tuttavia, l'inserimento di radicali innovazioni concettuali nella conoscenza considerata acquisita si presenta sempre come un più o meno lento processo di assimilazione da parte della comunità scientifica. Come abbiamo già avuto modo di osservare, il concetto di guanto di luce è stato, da questo punto di vista, esemplare. La sua invenzione è stata separata dalla sua accettazione da decenni: mentre alla prima può essere attribuita una data precisa (1905), la seconda si colloca in un intervallo di tempo il cui inizio può essere segnato dalla scoperta dell'effetto Compton, ma la cui fine può essere solo plausibilmente indicata intorno al 1930. La fase finale di questo periodo non ha visto solo il disperato tentativo di Bohr, Kramers e Slater di opporsi all'accettazione del quanto di luce (pagina 160). Esso è stato caratterizzato da un vivacissimo fermento teorico nel cui crogiolo ha visto la luce la meccanica quantica (matriciale e ondulatoria) e si sono confrontati approcci alternativi. Per quanto riguarda l'effetto Compton, è significativo che Schrödinger, autore del fondamentale lavoro sulla descrizione corpuscolare dell'effetto Doppler luminoso basata sulle leggi di conservazione, abbia percorso il cammino inverso a proposito dell'effetto Compton [149]. In questo lavoro, discusso, per esempio, in [150] insieme ad un analogo tentativo di Guido Beck, Schrödinger tratta l'interazione tra la radiazione X descritta come un'onda elettromagnetica e l'elettrone descritto come un'onda di de Broglie, sulla base di una analogia tra l'interazione di un'onda luminosa ed una acustica. Schrödinger riottiene così la relazione fondamentale dell'effetto Compton (IV.130).

L'effetto Compton ha contribuito a far emergere un fenomeno fondamentale: quello dell'interazione tra un fotone e un elettrone libero. Questa interazione è stata poi descritta dalla elettrodinamica quantica (QED, Quantum Electro - Dynamics): la scoperta dell'effetto Compton ha quindi segnato una delle tracce verso la QED [150].

IV.9 Interferenza della luce

Riferendoci alla luce, abbiamo sinora usato due locuzioni: 'descrizione ondulatoria o corpuscolare della luce' e 'natura della luce'. La prima si riferisce al nostro modo di descrivere la luce in termini di onde o, alternativamente, di fotoni; la seconda riguarda invece la luce nella nostra immagine del Mondo. Le due questioni, descrizione e natura, non sono indipendenti, ma debbono essere tenute chiaramente distinte. La descrizione ondulatoria si è affermata nel corso dell'Ottocento, nel quadro di una concezione continua della struttura della materia e della radiazione. In questo quadro concettuale, o, meglio, all'interno di questa immagine del Mondo, il vuoto, concepito come assenza di materia e radiazione non esiste: infatti, l'Etere (o gli Eteri) riempivano tutto lo spazio. L'ipotesi dei quanti di luce, avanzata da Einstein nel 1905, ma entrata a far parte della conoscenza considerata come acquisita solo qualche decennio dopo, ha permesso di descrivere l'interazione tra radiazione e materia a livello atomico, in sintonia con la progressiva acquisizione della natura discreta della materia. Tuttavia, la stessa ipotesi ha posto due questioni: come spiegare in termini di quanti di luce i fenomeni, per esempio, di interferenza; e quale è il raccordo tra descrizione ondulatoria e corpuscolare della luce? Per quanto concerne i fenomeni di interferenza, è noto come la teoria elettromagnetica della luce descriva questi fenomeni. Vedremo più avanti come sia possibile descrivere gli stessi fenomeni in termini di fotoni

IV.9.1 Descrizione divulgativa di Maxwell

Circa settanta anni dopo gli esperimenti di Young sull'interferenza della luce, all'interno della voce 'Etere' scritta per la IX edizione dell'Enciclopedia Britannica, Maxwell presenta il fenomeno dell'interferenza luminosa illustrando, con pochi passaggi, tutte le caratteristiche del fenomeno [14]. È un raro esempio di come si possa fare opera di divulgazione di un argomento scientifico assai complesso senza rinunciare alla correttezza delle espressioni usate e al rigore dell'argomentazione.

Che la luce non sia una sostanza può essere dimostrato con il fenomeno dell'interferenza. Un fascio di luce proveniente da una sorgente è diviso, mediante certi metodi ottici, in due parti e queste, dopo aver percorso cammini diversi, sono ricongiunte e cadono sopra uno schermo. Se uno dei due fasci è intercettato, l'altro cade sullo schermo e lo illumina; ma se entrambi i fasci passano, lo schermo diventa scuro in certi posti mostrando così che due porzioni di luce si sono distrutte a vicenda. Ora, noi *non possiamo supporre che due corpi possano distruggersi a vicenda quando messi insieme*; pertanto la luce non può essere una sostanza. Ciò che abbiamo mostrato è che una porzione di luce può esser l'esatto opposto di un'altra porzione, così come +*a* è l'esatto opposto di –*a*, qualunque cosa *a* possa essere. Tra le grandezze fisiche, ne troviamo alcune che sono capaci di avere il loro segno cambiato, ed altre che non lo sono. Così uno spostamento in una direzione è l'esatto opposto di uno spostamento uguale nella direzione opposta. Queste grandezze sono misure, non di una sostanza, ma, sempre, di processi che si svolgono in una sostanza. Concludiamo pertanto che la luce non è una sostanza ma un processo che si manifesta in una sostanza, il processo che si manifesta nella prima porzione di luce essendo sempre l'esatto opposto del processo che si manifesta nell'altra [porzione] allo stesso istante, così che quando le due porzioni sono congiunte, non si verifica alcun processo. Per determinare la natura del processo in cui consiste la luce, noi cambiamo la lunghezza di uno o di entrambi i cammini delle due porzioni del fascio e troviamo che la luce si estingue quando la differenza tra le lunghezze dei cammini è un multiplo intero dispari di una certa piccola distanza chiamata mezza lunghezza d'onda. In tutti gli altri casi c'è più o meno luce; e quando i cammini sono uguali, o quando la loro differenza è un multiplo intero di un'intera lunghezza d'onda, lo schermo appare quattro volte più luminoso di quando una [sola] porzione del fascio cade su di esso. Nella realizzazione usuale dell'esperimento, questi casi diversi sono mostrati simultaneamente in punti diversi dello schermo, così che noi vediamo sullo schermo un insieme di frange che consistono di linee scure ad intervalli uguali, con bande luminose di intensità variabile tra di esse.

Se consideriamo quello che accade in punti diversi dell'asse di un fascio di luce allo stesso istante, troveremo che se la distanza tra i punti è un multiplo di una lunghezza d'onda lo stesso processo si svolge nei due punti allo stesso istante; ma se la distanza è un multiplo dispari di mezza lunghezza d'onda, il processo che si svolge in un punto è l'esatto opposto del processo che si svolge nell'altro.

Ora, è noto che la luce si propaga con una certa velocità $(3.004 \times 10^{10}$ centimetri al secondo secondo Cornu). *Se, pertanto, supponiamo che un punto mobile viaggi lungo il raggio con questa velocità, troveremo lo stesso processo svolgersi in ogni punto del raggio raggiunto dal punto mobile.* Se, infine, consideriamo un punto fisso sull'asse del fascio, osserveremo un rapido alternarsi di questi processi opposti, l'intervallo di tempo tra processi simili essendo l'intervallo di tempo che la luce impiega a percorrere una lunghezza d'onda.

Questi fenomeni possono essere riassunti nell'espressione matematica

$$u = A\cos(nt - px + a)$$

che fornisce u, la fase del processo, in un punto la cui distanza da un punto fisso nel fascio è x al tempo t.
Non abbiamo determinato nulla per quanto concerne la natura del processo. Potrebbe essere uno spostamento, o una rotazione, o una perturbazione elettrica, o qualunque grandezza fisica che è capace di assumere valori negativi e positivi. Qualunque sia la natura del processo, se è capace di essere espressa da un'equazione di questa forma, il processo che si svolge in un punto fisso si chiama vibrazione; la costante *A* è chiamata ampiezza; il tempo $2\pi/n$ è chiamato periodo; e nt - px + a è la fase.

La configurazione ad un determinato istante è chiamata un'onda, e la distanza $2\pi/p$ è chiamata lunghezza d'onda, la velocità di propagazione è n/p. Quando osserviamo le diverse parti del mezzo che subiscono lo stesso processo in successione, usiamo la parola ondulatorio per denotare questa caratteristica del processo senza restringere in alcun modo la sua natura fisica.

Una visione più profonda della natura fisica del processo si ottiene dal fatto che se i due raggi sono polarizzati, e se il piano di polarizzazione di uno di essi è ruotato intorno all'asse del raggio, allora quando i due piani di polarizzazione sono paralleli il fenomeno di interferenza compare come descritto sopra. Mentre il piano [di polarizzazione] ruota, le bande scure e chiare divengono meno distinte e, quando i piani di polarizzazione sono perpendicolari, l'illuminazione dello schermo diventa uniforme e non si può scoprire alcuna traccia di interferenza.

[.....]

Questo processo può, tuttavia, essere un processo elettromagnetico e, siccome in questo caso lo spostamento elettrico e la perturbazione magnetica sono tra loro perpendicolari, ciascuno dei due può essere nel piano di polarizzazione [14, corsivi miei].

Questo brano di Maxwell ci mostra anche come una immagine del Mondo possa influenzare le argomentazioni di uno scienziato. Riferendosi al fenomeno dell'interferenza, Maxwell riflette sulla possibile natura della luce e giunge alla *plausibile* conclusione che essa non può essere una *sostanza* perché «non possiamo supporre che due corpi possano distruggersi a vicenda quando messi insieme.» Oggi, questa argomentazione non è più valida, considerato che abbiamo visto, per esempio, come un elettrone e un positrone 'possano distruggersi a vicenda, quando messi insieme'. Indipendentemente dall'argomentazione usata da Maxwell, la sua conclusione oggi non sarebbe comunque plausibile, perché, se la luce fosse costituita da fotoni cioè da un quanto di energia, essa sarebbe 'una sostanza', intendendo con questo termine non solo materia dotata di massa a riposo ma anche energia. Il brano contiene inoltre un altro passaggio interessante, là dove Maxwell scrive: «Se, pertanto, supponiamo che un punto mobile viaggi lungo il raggio con questa velocità (la velocità della luce), troveremo lo stesso processo svolgersi in ogni punto del raggio raggiunto dal punto mobile». Questa frase richiama alla mente l'esperimento mentale che Einstein, allora sessantasettenne, racconta di avere ideato all'età di sedici anni: «se io potessi seguire un raggio di luce alla velocità c (la velocità della luce nel vuoto), il raggio di luce mi apparirebbe come un campo elettromagnetico oscillante nello spazio, in uno stato di quiete. Ma nulla del genere sembra possa sussistere sulla base dell'esperienza o delle equazioni di Maxwell [26, p. 86]». Questo esperimento mentale di Einstein è spesso citato senza alcun commento. Confrontato con la frase di Maxwell, appare subito evidente una contraddizione: Einstein considera anomalo, secondo la teoria di Maxwell, ciò che invece pare a Maxwell del tutto normale. C'è qualcosa che non torna. In effetti, John Norton ha dedicato un acuto saggio all'argomento [151]: secondo Norton, la reminiscenza di Einstein deve essere riesaminata non tanto alla luce della teoria di Maxwell ma in relazione alle teorie emissive della luce secondo le quali la velocità della luce si somma sempre a quella della sorgente.

IV.9.2 Descrizione elettromagnetica

Vediamo ora come si descrive l'interferenza attraverso due fenditure sulla base dell'elettromagnetismo maxwelliano. Nella figura IV.14, è mostrata la disposizione sperimentale cui Maxwell si riferisce e che, naturalmente, riproduce lo schema sperimentale ideato da Young.

Si suppone che le due sorgenti costituite dalle due fenditure abbiano la stessa intensità e che la porzione d'onda elettromagnetica che le investe sia polarizzata linearmente e che possa considerarsi piana. Sullo schermo di osservazione l'intensità luminosa è data da:

$$I = 4I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin\theta/\lambda)}{\pi b \sin\theta/\lambda} \right]^2 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)$$
(IV.140)

dove I_0 è l'intensità massima prevista nel caso in cui sia aperta una sola fenditura e λ la lunghezza d'onda usata. L'intensità descritta dalla (IV.140) è rappresentata in figura IV.15, dove si è assunta uguale ad 1 l'intensità I_0 . La curva piena rappresenta l'intensità prevista; la curva tratteggiata il termine diffrattivo in (sin²): sarebbe la curva osservata con una sola fenditura la cui intensità fosse quadrupla di quella considerata.

La descrizione dell'esperimento delle due fenditure suggerisce le seguenti riflessioni:



Figura IV.14. Interferenza con due fenditure 1 e 2. *S* è la sorgente di luce. Ogni fenditura è rettangolare di lati *a* e *b*, con *b* \ll *a*; il lato lungo *a* delle due fenditure è perpendicolare al piano della figura. La distanza *D* tra i due schermi *P*₁ e *P*₂ è tale che *D* \gg *d*, dove *d* è la distanza tra due punti omologhi delle due fenditure. Siccome *D* \gg *d* la differenza tra i cammini geometrici di due 'raggi' provenienti da due strisce omologhe delle due fenditure è data da \approx *d* sin θ . Sullo schermo di osservazione *P*₂ le frange di interferenza appaiono come strisce di intensità variabile, parallele al lato lungo *a* delle fenditure e, quindi, perpendicolari al piano della figura. Questa disposizione sperimentale si chiama di Fraunhofer.

- La distribuzione dell'intensità luminosa dovuta a due fenditure *non* è la somma delle intensità luminose dovute alle due fenditure usate una alla volta. Le due fenditure aperte una alla volta, darebbero, ognuna, una distribuzione come quella mostrata dalla curva tratteggiata nella figura IV.15 e centrata rispetto al centro della fenditura: è immediato verificare a vista come la somma di due curve di questo tipo non possa essere uguale a quella che si ottiene con le due fenditure contemporaneamente aperte.
- 2. La predizione della distribuzione dell'energia sullo schermo è una conseguenza diretta della regola di sovrapposizione vettoriale dei campi, implicita nelle equazioni di Maxwell. In un generico punto R dello schermo, si sommano i campi elettrici delle porzioni d'onda provenienti dalle due fenditure 1 e 2: l'energia depositata nel punto R risulta proporzionale al quadrato del campo elettrico risultante.
- 3. Supponiamo che *R* sia il punto di buio, cioè un punto in cui i campi elettrici si sommano in modo tale per cui il loro risultante è nullo. I campi, provenienti da 1 e da 2 si incontrano in *R*, interferiscono e si annullano. In questo punto, non viene depositata alcuna energia.
- 4. Supponiamo che *R* sia il punto di massima luce (il punto *O* nella figura IV.14): i campi si sommano in modo tale da dare $\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{E}_0$,



Figura IV.15. Figura di interferenza prodotta da due fenditure secondo la (IV.140), in cui si è posto $I_0 = 1$. I valori dei parametri usati sono: $b/\lambda = 100$; d/b = 8. La curva piena rappresenta l'intensità prevista; la curva tratteggiata il termine diffrattivo in (sin²): sarebbe la curva prevista con una sola fenditura aperta la cui intensità fosse quadrupla di quella considerata.

se si assume che l'ampiezza delle due onde in *R* sia la stessa ed uguale ad E_0 . L'energia depositata in *R* è in questo caso proporzionale a $4E_0^2$, mentre la somma dell'energia associata a ciascuno dei due campi interferenti è proporzionale a $2E_0^2$.

La teoria prevede correttamente quale è il valore dei campi in un generico punto dello schermo e quale è la distribuzione di energia sullo schermo: non è invece in grado di descrivere quale sia il percorso dell'energia tra le due fenditure e lo schermo e, quindi, quale sia il percorso dell'energia tra la sorgente e lo schermo. Ritroveremo questa caratteristica nella descrizione quantica dell'interferenza.

Se la larghezza *b* delle due fenditure tende a zero, il termine in \sin^2 nella (IV.140) tende ad uno: allora, l'intensità della luce sullo schermo di osservazione è data da:

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right) \tag{IV.141}$$

IV.9.3 Descrizione quantica

La spiegazione, da parte della teoria dei quanti di luce dei fenomeni sinora interpretati sulla base dell'ipotesi ondulatoria, quali l'interferenza, la diffusione, la dispersione ecc., appare come un'impresa molto impegnativa, e per realizzarla, sarà senza dubbio necessario fare un compromesso tra la vecchia teoria e la nuova, introducendo in questa la nozione di periodicità [152, p. 811].

Louis de Broglie

Nelle sue *Lezioni*, Richard Feynman descrive quantitativamente un esperimento ideale di interferenza di elettroni attraverso due fenditure puntiformi [153, p. 37 - 5, 37 - 7], [154, p. 15 - 8, 15 - 14]. La trattazione di Feynman può essere proficuamente estesa all'interferenza di fotoni attraverso due fenditure [39, p. 14], [86, p. 13-14].

Ogni processo fisico può essere visto come una transizione da uno stato iniziale a uno stato finale. Diversamente da come usualmente definito ('qualcosa che accade in un punto dello spazio ad un certo istante') definiamo come 'evento' un processo in cui un sistema fisico passa da uno stato iniziale ad uno stato finale. Si osservi come questa nuova definizione di evento precluda una descrizione spazio-temporale del processo fisico in esame. Assumeremo i seguenti postulati:

1. La *probabilità* di un evento è data dal quadrato del modulo di un numero complesso $\eta = Ce^{i\varphi}$ chiamato *ampiezza di probabilità*

$$P = |\eta|^2 = C^2$$
 (IV.142)

In generale ci possono essere diversi modi (diciamo *n*) in cui un sistema fisico può evolvere da uno stato iniziale a uno stato finale. Ad ogni possibile modo è associata un'ampiezza $\eta_i = C_i e^{i\varphi_i}$ (i=1,2,...,n) il cui modulo al quadrato è pari alla probabilità di quel modo

$$P_i = |\eta_i|^2 = C_i^2$$
 (*i* = 1, 2, ..., *n*) (IV.143)

2. Se si effettua un esperimento in grado di determinare quale dei possibili modi di realizzazione di un evento si è effettivamente verificato, la probabilità dell'evento è la somma delle probabilità di ciascun modo.

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$
 (IV.144)

3. Se si effettua un esperimento in cui è impossibile dire quale modo si sia verificato, l'ampiezza di probabilità dell'evento è la somma delle ampiezze di ciascun modo e la sua probabilità è data dal quadrato del modulo della somma delle ampiezze di probabilità:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$$

$$P = |\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n|^2$$
(IV.145)

Vediamo ora come sia possibile applicare questo approccio al fenomeno dell'interferenza luminosa attraverso due fenditure, considerate, per semplicità, puntiformi e poste a distanza *d* una dall'altra. Siccome supponiamo che la luce sia costituita da fotoni, sviluppiamo l'argomentazione nel modo seguente.

Consideriamo un fotone che, partito dalla sorgente, arriva sullo schermo: secondo la nostra definizione, questo processo fisico costituisce un evento. Se entrambe le fenditure sono aperte, non siamo in grado di stabilire in quale modo l'evento si è verificato, cioè attraverso la fenditura 1 con ampiezza di probabilità $\eta_1 = C_1 e^{i\varphi_1}$, o attraverso la fenditura 2 con ampiezza di probabilità $\eta_2 = C_2 e^{i\varphi_2}$. La probabilità P_{12} di realizzazione di questo evento sarà allora:

$$P_{12} = |\eta_1 + \eta_2|^2 \tag{IV.146}$$

Inserendo le espressioni di η_1 e η_2 e applicando le formule trigonometriche di sottrazione si ottiene che tale probabilità dipende dalla differenza di fase $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ tra le due ampiezze

$$P_{12} = C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos\varphi \qquad (\text{IV.147})$$

Se si suppone che il modulo di ciascuna ampiezza sia uguale ($C_1 = C_2$) e ricordando l'identità trigonometrica $1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$ si ottiene

$$P_{12} = 4C_1^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$
 (IV.148)

Assumendo ora che la fase φ sia uguale a $2\pi l/\lambda_{dB}$, dove l è la lunghezza del cammino percorso dal fotone e λ_{dB} la lunghezza d'onda di de Broglie ad esso associata, l'espressione della probabilità diventa:

$$P_{12} = 4C_1^2 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda_{dB}}\right) \tag{IV.149}$$

Siccome per un fotone $\lambda_{dB} = h/p = \lambda$, questa equazione è identica quella (IV.141) che si ottiene per l'intensità luminosa *I* prevista sullo schermo trattando la luce come un'onda elettromagnetica avente lunghezza d'onda λ . L'identica struttura delle due equazioni emerge ancora meglio ricordando che, nella trattazione elettromagnetica, l'intensità $I \propto E^2$ ove, E è l'ampiezza (modulo) del campo elettrico dell'onda. Siccome le due equazioni (IV.149, IV.141) descrivono lo stesso processo fisico deve essere $P_{12} \propto I$, cioè la probabilità che un fotone arrivi in un punto dello schermo è proporzionale all'intensità classica in quel medesimo punto.

Elettromagnetica	⇔	Quantica
$\lambda = c/v$	⇔	$\lambda_{dB} = h/p = c/\nu = \lambda$
Campo elettrico \vec{E}	\Leftrightarrow	Ampiezza di probabilità $\eta = C e^{i\phi}$
$\vec{E}_{12} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$	⇔	$\eta_{12} = \eta_1 + \eta_2$
Densità di energia $\propto E^2$	\Leftrightarrow	Probabilità $\propto \eta ^2$

Tabella IV.1. Descrizione maxwelliana e quantica dell'interferenza della radiazione elettromagnetica.

L'identica struttura delle due equazioni finali (IV.140, IV.148) è, peraltro, la conseguenza del fatto che le due derivazioni hanno la stessa struttura matematica, come è posto in evidenza dalla tabella IV.1.

Nella derivazione quantica è stata usata la lunghezza d'onda di de Broglie. Ciò riflette il fatto che, nella fisica quantica, una 'particella' come, per esempio, un elettrone è descritta attribuendo ad essa non solo grandezze fisiche 'classiche' quali la massa e la carica elettrica, ma anche un momento angolare intrinseco (spin) e una lunghezza d'onda di de Broglie. Quest'ultima proprietà dell'elettrone entra in gioco nei fenomeni di interferenza o di diffrazione. La lunghezza d'onda di de Broglie di un fotone altro non è che la lunghezza d'onda della corrispondente onda elettromagnetica. Infatti, se, seguendo de Broglie, scriviamo per il fotone $\lambda_{dB} = h/p$, otteniamo immediatamente $\lambda_{dB} = h/(h\nu/c) = \lambda$.

IV.9.4 Onde elettromagnetiche e fotoni

La trattazione matematica dell'esperimento delle due fenditure suggerisce che non è possibile una descrizione causale dell'esperimento all'interno di una immagine del Mondo. Proviamo a farlo e, per semplicità, supponiamo che le due fenditure siano puntiformi. Ciascuna fenditura, essendo una sorgente di luce, emette un'onda con la sua energia. Siccome siamo all'interno di una immagine del Mondo, possiamo assumere che le onde elettromagnetiche della teoria sono degli oggetti, cioè *esistono* nel Mondo. In un punto qualsiasi situato tra i due schermi P_1 e P_2 arrivano le due onde con la loro energia. Supponiamo ora che il punto scelto sia un punto di buio (in cui i campi elettrici delle due onde danno un risultante nullo): dove è finita l'energia trasportata lì dalle due onde? Evidentemente, nel tentativo di costruire una descrizione causale all'interno di una immagine del Mondo abbiamo prodotto una anomalia nella catena causale. Dobbiamo quindi concludere che non è possibile una descrizione causale basata sull'assunzione che le onde elettromagnetiche esistano nel Mondo: l'asserzione di esistenza delle onde elettromagnetiche è incompatibile con una immagine del Mondo basata su catene causali. Proviamo a ripetere il tentativo supponendo che i fotoni siano degli oggetti, cioè che i fotoni esistano nel Mondo. Supporremo che l'interazione tra fotone e rivelatore sia localizzata, idealmente, in un punto. Un fotone parte dalla sorgente *S* e arriva in un punto dello schermo: non è possibile costruire una catena causale perché la teoria predice solo la probabilità di questo processo (evento). In altri termini: il fotone emesso dalla sorgente può raggiungere qualsiasi punto dello schermo, ad eccezione di quelli per cui la probabilità è nulla. In conclusione: la descrizione elettromagnetica e quella quantica dell'interferenza predicono, rispettivamente, l'intensità della luce in un punto del rivelatore o la probabilità che un fotone arrivi in quel punto. Tuttavia, in entrambi i casi non è possibile costruire una catena causale per questo fenomeno all'interno di una immagine del Mondo.

È istruttivo applicare le riflessioni svolte su causalità, determinismo e predicibilità (sezione I.4) al caso dell'interferenza. La descrizione classica in termini di onde è deterministica e predittiva; ma non permette una sua interpretazione causale. Inoltre, il sistema fisico descritto è deterministico. Analogamente, la descrizione quantica è deterministica (in termini di probabilità) e predittiva (in termini di probabilità); ma non permette una sua interpretazione causale. Nel caso della descrizione quantica, il sistema fisico descritto non è deterministico.

Sulla base delle considerazioni svolte, ci attendiamo che se fossimo in grado di eseguire un esperimento delle due fenditure con un fotone alla volta (un solo fotone alla volta in volo tra la sorgente e il rivelatore) osserveremmo sullo schermo delle frange di interferenza la cui intensità è quella prevista dalla teoria classica, naturalmente quando il numero dei fotoni depositati sullo schermo è statisticamente significativo. Abbiamo quindi raggiunto un'importante conclusione: *in alcuni contesti sperimentali*, quando il numero dei fotoni coinvolti è statisticamente significativo (non importa se i fotoni sono usati uno alla volta o tutti insieme) possiamo descrivere il fenomeno fisico in termini di onde. L'esperimento discusso nella sezione successiva conferma che questa predizione è corretta, per quanto concerne i fenomeni di interferenza.

IV.9.5 Esperimenti di interferenza a fotone singolo

Nel 2005, cento anni dopo la formulazione dell'ipotesi dei quanti di luce, un gruppo di ricercatori ha eseguito un esperimento di interferenza attraverso due fenditure usando una sorgente in grado di emettere un fotone alla volta [155]. Lo schema della disposizione sperimentale è mostrato nella figura IV.16 25 .



Figura IV.16. FB è un biprisma di Fresnel; CCD una fotocamera (con caratteristiche particolari); APD sono due fotodiodi a valanga di silicio. Le misure di coincidenza sono effettuate rimuovendo la fotocamera. Si veda il testo.

Le caratteristiche dell'esperimento sono:

- 1. La sorgente di luce un centro di colore in un nanocristallo di diamante – emette (quasi) un fotone alla volta ed è eccitata in modo controllato.
- 2. L'elemento dispersivo è un biprisma di Fresnel (equivalente ad una doppia fenditura).
- 3. Rimuovendo la fotocamera, si effettuano misure di coincidenza che dimostrano, che ogni fotone è rivelato da uno o dall'altro fotodiodo (assenza di coincidenze, cioè di segnali di arrivo contemporaneo del fotone sui due fotodiodi).

Le misure di coincidenza sono analizzate sulla base delle seguenti considerazioni. Se la luce è descritta come un'onda (allora la luce si suddivide

²⁵Questo apparato sperimentale è separato da quello usato da Taylor (pagina 129) da circa un secolo di sviluppo tecnologico.

tra i due cammini di interferenza, cioè tra le due fenditure) e la rivelazione dei fotoni è quantizzata, si dimostra che il numero di coincidenze N_C deve soddisfare la disuguaglianza:

$$\alpha = \frac{N_C N_T}{N_1 N_2} \ge 1 \tag{IV.150}$$

dove N_T è il numero di eccitazioni della sorgente e N_1 , N_2 il numero di conteggi effettuati dall'uno o dall'altro fotodiodo. Se invece, la luce è descritta come composta da fotoni che non si suddividono tra i due cammini, deve essere $\alpha = 0$; il valore sperimentale è di 0.13 ± 0.01 . Secondo gli autori, questa discrepanza è dovuta alla probabilità non nulla di emissione di più di un fotone alla volta. Pertanto, con questo limite, il punto 3 è verificato. A riprova dell'affidabilità della disequazione (IV.150), se si usano impulsi di luce deboli, corrispondenti a un numero medio di fotoni in volo tra sorgente e fotocamera minore di 10^{-2} , il parametro α risulta uguale a circa uno. Quest'ultimo risultato, dimostra anche che l'esperimento di Taylor e quelli fatti successivamente nel secolo scorso [85, 87, 86], non erano esperimenti a fotone singolo.

Le figure di interferenza ottenute mostrano che i primi duecento fotoni (circa) si dispongono sul rivelatore in modo apparentemente casuale; duemila fotoni (circa) sono sufficienti per permettere l'individuazione di frange di interferenza; ventimila fotoni (circa) creano frange di interferenza ben visibili. In rete si trova un video dell'esperimento prodotto montando in sequenza le fotografie scattate ogni secondo (ogni fotografia registra, in media, otto fotoni) [155].

IV.9.6 Fotografie con basse intensità luminose

L'interazione discreta tra luce e rivelatore è dimostrata anche da fotografie eseguite con basse intensità luminose. Come nel caso dell'interferenza a fotone singolo, l'esperimento dimostra che l'interazione tra luce e rivelatore è localizzata in zone definite del rivelatore. In entrambi i casi, i rivelatori hanno una struttura discreta, pixels per la fotocamera e microcristalli nel caso della pellicola fotografica.

Questi esperimenti permettono di trarre anche conclusioni verosimili sulla *natura* della luce, cioè su 'che cosa è la luce nel Mondo'. Infatti, solo una natura discreta dell'energia luminosa è compatibile con i risultati sperimentali. Se supponiamo che la luce sia un'onda dovremmo spiegare come un'energia distribuita sulla superficie dell'onda si possa concentrare in zone localizzate del rivelatore. In assenza di una descrizione teorica di un possi-

Capitolo IV - La luce



Figura IV.17. Fotografie eseguite con diverse intensità luminose: (a) 1×10^3 fotoni; (b) 1.2×10^4 fotoni; (c) 2.8×10^7 fotoni. Fotografie riprodotte dall'articolo di Albert Rose [157] per gentile permesso dell'Optical Society of America.

bile processo di questo tipo, dobbiamo concludere che l'esistenza di onde luminose nel Mondo non è plausibile.

IV.10 Raccordo tra descrizione ondulatoria e corpuscolare della luce

Formalmente, questo raccordo è assicurato dalla formula E = hv interpretata alla Einstein. Abbiamo anche visto che, in alcuni contesti sperimentali quali l'interferenza e la fotografia, le predizioni della descrizione ondulatoria sono in accordo con l'esperimento quando il numero di fotoni coinvolti (uno alla volta o tutti insieme) è sufficientemente elevato. Tuttavia, l'uso di un numero di fotoni elevato in un esperimento non è sufficiente ad assicurare l'applicabilità della descrizione ondulatoria. Alcuni esempi sono assai significativi. L'effetto fotoelettrico è stato, storicamente, il primo fenomeno che ha vanificato diversi tentativi di descrizione mediante la teoria ondulatoria [109, 875 - 878] [91, p. 21 - 30]. Ancora più drammatico è stato il fallimento della teoria ondulatoria a proposito della diffusione di raggi X o gamma da parte della materia con aumento della lunghezza d'onda (effetto Compton). Meno appariscente è stato invece il caso dell'effetto Doppler luminoso: qui, l'impossibilità da parte della teoria ondulatoria di spiegare il processo di emissione o assorbimento della radiazione da parte di atomi o nuclei è stata oscurata dalla sua capacità di predire come la frequenza di un'onda luminosa varia passando da un SRI all'altro. Questi tre fenomeni hanno una fondamentale caratteristica in comune: in ciascuno di essi c'è scambio di energia e quantità di moto tra radiazione e materia *a livello mi*croscopico. Quest'ultima precisazione è essenziale: infatti la teoria ondulatoria è perfettamente in grado di spiegare lo scambio di energia e quantità di moto a livello macroscopico (pressione della radiazione); si veda, a questo proposito, l'esempio discusso a pagina 136^{26} .

IV.11 Due formule (magiche)

In un testo di fisica non si dovrebbe mai usare l'aggettivo 'magico'. Penso, però, che si possa fare una eccezione, razionalmente argomentata, a proposito di due equazioni:

$$E_{ph} = hv \tag{IV.151}$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} \tag{IV.152}$$

Abbiamo avuto già modo di discutere la prima equazione, che connette la descrizione corpuscolare della luce a quella ondulatoria. In taluni contesti sperimentali, le predizioni della descrizione ondulatoria sono in accordo con l'esperimento quando il numero di fotoni in gioco è sufficientemente elevato: non ha importanza se usati uno alla volta oppure tutti insieme. *Tuttavia, dobbiamo riconoscere che non sappiamo perché*. Abbiamo inoltre visto che, in molte situazioni sperimentali, è sufficiente sostituire alle intensità delle onde elettromagnetiche, le probabilità della descrizione quantica. Se, per esempio, un filtro riduce l'intensità della luce, descritta come un onda, di un fattore α (α < 1), la probabilità che un singolo fotone attraversi quel filtro sarà α .

Nella sezione IV.7.2, abbiamo visto che l'energia di un fotone emesso da un atomo o da un nucleo è data da:

$$E_{ph} = E_{ph}^{0} \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c)\cos\theta_1}$$
(IV.153)

dove E_{ph}^0 è l'energia del fotone emesso quando l'atomo è in quiete prima dell'emissione. Se in questa equazione poniamo E = hv (IV.151), otteniamo immediatamente la formula dell'effetto Doppler per la luce, descritta come un'onda senza dover sviluppare alcun calcolo. Tuttavia, mentre la formula (IV.153) è scritta nel SRI del laboratorio, la formula che si ricava da essa e dalla (IV.151):

$$v = v' \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c)\cos\theta_1}$$
(IV.154)

²⁶Compton aveva intuito questo aspetto quando scriveva: «...È un corollario che l'energia della radiazione è racchiusa nei fotoni e non nelle onde. Perché per energia intendiamo la capacità di compiere lavoro, e troviamo che *quando la radiazione fa qualcosa* essa agisce come particelle [158, p. 88; corsivo mio]».

connette le frequenze misurate in due SRI. Il laboratorio vede il SRI 'accentato' muoversi insieme all'atomo con velocità v_1 (velocità dell'atomo prima dell'emissione) lungo la direzione positiva dell'asse $x \equiv x'$; $v \in$ la frequenza misurata nel laboratorio; $v' = E_{ph}^0 / h \in$ la frequenza misurata dal SRI accentato.

La trattazione dei fenomeni elettromagnetici nel vuoto basata sul formalismo spazio - temporale dimostra che l'insieme delle quattro grandezze $(\omega/c, k_1, k_2, k_3)$ costituisce un quadrivettore \mathcal{K}_{μ} ($\mu = 0, 1, 2, 3$), detto quadrivettore d'onda: $\omega = 2\pi v$ è la pulsazione dell'onda e k_1, k_2, k_3 sono le tre componenti del vettore d'onda avente modulo $2\pi/\lambda$. Le componenti del quadrivettore d'onda si trasformano, passando da un SRI ad un altro, come le coordinate (ct, x, y, z) del continuo spazio - temporale. Si consideri ora un'onda luminosa piana osservata nel sistema di riferimento O' – considerato in moto con velocità cB (B < 1) rispetto a O lungo l'asse comune $x \equiv x'$ – e descritta dal quadrivettore \mathcal{K}_{μ}' . Si supponga, per semplicità, che la direzione di propagazione dell'onda giaccia nel piano (x', y'); sia θ' l'angolo che il vettore d'onda tridimensionale \vec{k}' forma con l'asse x'. Le componenti di \mathcal{K}_{μ}' sono allora:

$$\mathcal{K}_{0}' = \frac{\omega'}{c}$$
$$\mathcal{K}_{1}' = \frac{\omega'}{c}\cos\theta'$$
$$\mathcal{K}_{2}' = \frac{\omega'}{c}\sin\theta'$$
$$\mathcal{K}_{3}' = 0$$

Si ha pertanto:

$$\mathcal{K}_0 = \Gamma(\mathcal{K}'_0 + B\mathcal{K}'_1) \tag{IV.155}$$

$$\mathcal{K}_1 = \Gamma(\mathcal{K}'_1 + B\mathcal{K}'_0) \tag{IV.156}$$

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2' \tag{IV.157}$$

$$\mathcal{K}_3 = \mathcal{K}'_3 \tag{IV.158}$$

Siccome $\mathcal{K}_3 = k_3 = 0$, anche nel sistema di riferimento *O* la direzione di propagazione dell'onda giace nel piano (*x*, *y*). Dalla (IV.155) si ottiene:

$$\omega = \Gamma \omega' (1 + B \cos \theta') \tag{IV.159}$$

e dalla (IV.156), tenendo conto della (IV.159):

$$\cos\theta = \frac{B + \cos\theta'}{1 + B\cos\theta'}$$
(IV.160)

Questa è l'equazione dell'aberrazione della luce. Da quest'ultima equazione è possibile dedurre (cambiando le grandezze accentate con quelle non accentate, e viceversa, e sostituendo -B a B) che:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - B}{1 - B\cos\theta} \tag{IV.161}$$

La (IV.159) diventa allora:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 - B\cos\theta} \tag{IV.162}$$

Questa equazione coincide con la (IV.154), *se* si pone $B = v_1/c$. Abbiamo così mostrato ancora una volta come la trattazione ondulatoria della luce sia solo in grado di correlare la frequenza della radiazione in due SRI, ma non di descrivere i processi di emissione o assorbimento.

La seconda formula magica è dovuta a Louis de Broglie che, diversamente da Einstein, non aveva alcuna remora a mescolare elementi della fisica dei quanti con quelli della relatività speciale ²⁷. Nel 1922 de Broglie pubblica un lavoro sulla 'radiazione di corpo nero e i quanti di luce' [159], caratterizzato dall'attribuzione di una massa hv/c^2 , seppur piccolissima, ai quanti di luce ²⁸. I quanti di luce sono quindi trattati come particelle relativistiche, dotate di una massa molto piccola, che obbediscono alle leggi della dinamica relativistica. Alla fine, de Broglie ricava – per la legge della radiazione di corpo nero – la legge di Wien (e non quella di Planck) perché, avendo dotato i quanti di una massa, applica ad essi la statistica di Boltzmann, trattando quindi i quanti di luce come se fossero molecole di un gas 'classico'. L'anno successivo, de Broglie percorre il cammino inverso e tratta un oggetto materiale in moto come se fosse un quanto di luce [160]. Considerata la massa m_0 e l'energia a riposo m_0c^2 dell'oggetto, de Broglie afferma che «il principio quantico suggerisce di attribuire questa energia interna ad un moto

 $^{^{27}}$ Nella letteratura contemporanea il suffisso dB nel simbolo λ_{dB} sta per (d)e (B)roglie.

²⁸L'argomento è lo stesso di quello dell'articolo di Emden [131], discusso nella sezione IV.7.1 solo per la parte riguardante l'effetto Doppler. Anche Emden aveva supposto che i quanti di luce avessero una massa non nulla. L'approccio concettuale è simile, come mostrato dalle introduzioni dei due articoli. de Broglie: «Lo scopo di questo lavoro è quello di ricavare un certo numero di risultati della teoria della radiazione [di corpo nero] con dei ragionamenti basati unicamente sulla termodinamica, sulla teoria cinetica e quella dei quanti, senza alcun intervento dell'elettromagnetismo» [159, p. 422]. Emden: «Pertanto, nel seguito, le leggi della radiazione termica saranno trattate sulla base dei quanti di luce, senza alcuna reminiscenza della teoria ondulatoria: questa, in ciò che segue, non deve esistere» [131, p. 513].

periodico semplice di frequenza tale che:

$$hv_0 = m_0 c^2$$
 (IV.163)

dove *c* è sempre la velocità limite della teoria della relatività e *h* la costante di Planck» [160, p. 507]. L'equazione postulata da de Broglie nasce da un'associazione di due concetti, quello di energia a riposo e quello di quanto di radiazione che non possono essere correlati come indicato da de Broglie se non mediante un nuovo postulato. Questo postulato era peraltro suggerito dal fatto di avere attribuito una massa ai quanti di luce: se un quanto di luce, cui è associata una frequenza mediante la relazione E = hv, possiede una massa, perchè un corpo massivo non potrebbe avere una frequenza associata? Con questo postulato, de Broglie elimina d'acchito l'asimmetria rilevata da Einstein nel lavoro sulla relatività speciale, asimmetria insita nella usuale descrizione discreta della materia e continua della radiazione: per de Broglie, radiazione e materia possono essere descritte mediante le stesse grandezze fisiche. Che alla materia e alla radiazione potessero essere attribuite grandezze fisiche quali l'energia, la quantità di moto e il momento angolare era già noto ai primi del Novecento²⁹: de Broglie completa il quadro attribuendo una massa ai quanti di luce ed una frequenza all'energia associata ad una massa. Quindi, de Broglie postula la (IV.163) ed è perfettamente consapevole di questo; l'ambiguità della nuova ipotesi nasce dal desiderio di ancorarla alla conoscenza acquisita. In un sistema di riferimento inerziale che vede la particella muoversi con velocità $v = \beta c$ ($\beta < 1$), l'energia della particella è data da:

$$E = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$
(IV.164)

e, quindi, alla particella è 'attribuibile' una frequenza

$$v = v_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$
 (IV.165)

ben diversa da quella

$$v_1 = v_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$
 (IV.166)

che il sistema di riferimento che vede la particella muoversi attribuirebbe al 'moto periodico interno' della particella sulla base delle trasformazioni di

²⁹È stato Poynting ad associare, per primo, un momento angolare ad un fascio di luce polarizzato circolarmente [161].

Lorentz (effetto Doppler trasversale). La (IV.165) e la (IV.166) sono incompatibili, a meno di attribuire alla (IV.165) un nuovo significato fisico distinto da quello della (IV.166). È questa la 'via d'uscita' scelta da de Broglie, 'via d'uscita' che ha generato nuova fisica. Con le sue parole:

Supponiamo che all'istante *t* l'oggetto in moto coincida nello spazio con un'onda di frequenza definita sopra [la frequenza v] e che si propaghi nella medesima direzione dell'oggetto in moto con velocità c/β . Quest'onda dotata di velocità superiore a *c* non può corrispondere ad una trasmissione di energia; la considereremo solo come un'onda fittizia associata al moto dell'oggetto mobile [160, p. 508].

L'attribuzione della velocità ν/β all'onda di frequenza ν (IV.165) permetterebbe di dedurre immediatamente la formula magica (IV.152). Infatti, la lunghezza d'onda dell''onda fittizia' è data da ³⁰:

$$\lambda_{dB} = \frac{V}{v} = V h \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{m_0 c^2} = h \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{m_0 v} = \frac{h}{p}$$
(IV.167)

dove si è usata la relazione $Vv = c^2$ che connette la velocita v della particella alla velocità V dell'onda fittizia. Tuttavia, de Broglie non esegue questi passaggi, ma si occupa di due diversi argomenti. Innanzitutto, dimostra che, se le due onde di frequenza $v_1 e v$ all'istante t = 0 sono in fase nel sistema di riferimento del laboratorio, esse continueranno ad essere in fase ad ogni istante successivo. In secondo luogo considera il moto di un elettrone su un'orbita circolare. Se all'istante t = 0 l'elettrone si trova nel punto O della traiettoria circolare e le due onde sono in fase, allora, imponendo che quando l'onda di frequenza v riaggancia l'elettrone le due onde siano ancora in fase, si ottiene la condizione di quantizzazione di Bohr, nel limite però di $\beta \ll 1$.

Nella tesi di dottorato [163], de Broglie riprende e sviluppa questa idea. de Broglie parte dalla interpretazione della formula $E = mc^2$. Secondo de Broglie, questa equazione stabilisce una equivalenza tra massa ed energia che deve essere sempre valida, anche nel caso dei quanti di luce. Scrive de Broglie:

Si può quindi pensare che per una grande legge della Natura, ad ogni pezzo di energia di massa propria m_0 , sia associato un fenomeno periodico di frequenza tale che si abbia:

$$hv_0 = m_0 c^2$$
 (IV.168)

³⁰Nel secondo lavoro dedicato a questo argomento, l'onda fittizia è denominata 'onda non materiale' [162, p. 548].

essendo v_0 misurata, ben inteso, nel sistema [di riferimento] associato al pezzo di energia. Questa ipotesi, è la base del nostro sistema: essa vale, come tutte le ipotesi, quanto valgono le conseguenze che si possono dedurre da essa [163, p. 33].

Dopo aver ricavato di nuovo le espressioni di v (IV.165) e v_1 (IV.166), de Broglie commenta:

C'è qui una difficoltà che mi ha assillato per lungo tempo; sono riuscito a superarla dimostrando il seguente teorema che, chiamerò il teorema dell'armonia delle fasi: "Il fenomeno periodico associato all'oggetto in moto e la cui frequenza per l'osservatore in quiete è uguale a

$$v_1 = \frac{1}{h}m_0c^2\sqrt{1-\beta^2}$$

appare, a questo osservatore, costantemente in fase con un'onda di frequenza

$$v = \frac{1}{h}m_0c^2\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

che si propaga nella stessa direzione dell'oggetto mobile con velocità $V = c/\beta$ [163, p. 35]".

de Broglie osserva che la velocità V > c dell'onda associata all'oggetto in moto è una velocità di fase e, quindi, concettualmente e numericamente distinta dalla velocità (< c) dell'oggetto mobile. de Broglie considera quindi un pacchetto d'onde le cui singole componenti hanno frequenze molto vicine a v e 'dimostra' che la velocità di gruppo di questo pacchetto d'onde coincide con la velocità v dell'oggetto mobile. In realtà, la trattazione del rapporto tra l'onda di frequenza v e il pacchetto d'onda svolta da de Broglie è stata oggetto di una analisi critica da parte di diversi studiosi: si veda, per esempio, [164, p. 1133 - 37] e la bibliografia ivi contenuta.

Anche all'interno della tesi non compare mai in modo esplicito la formula $\lambda = h/p$. Essa, tuttavia, compare sotto diverse forme, sia nella versione relativistica, sia in quella per velocità piccole rispetto a quella della luce ($\beta \ll 1$) [164, p. 1132 - 33].

Le evidenze sperimentali confermano l'efficacia della formula magica (IV.152). Le prime conferme furono date dagli esperimenti di diffrazione di elettroni di Davisson e Germer [165] e George Paget Thomson [166]. Gli esperimenti di Davisson e Germer erano esperimenti di riflessione da parte di cristalli, ed erano stati eseguiti con elettroni dotati di basse velocità (potenziale acceleratore pari a 100 V); quelli di Thomson erano esperimenti di

diffrazione attraverso film metallici sottili con un potenziale acceleratore di 70000 V. Esperimenti di diffrazione di elettroni accelerati da un potenziale acceleratore fino a 10^6 V furono eseguiti nel 1935 [167]. Mentre i primi esperimenti di Davisson e Germer avevano una scarsa accuratezza e la velocità degli elettroni era così piccola da poter tranquillamente usare per la quantità di moto degli elettroni la formula newtoniana, gli esperimenti di Hughes mostrarono la necessità di usare la formula relativistica per la quantità di moto, come era del resto previsto dalla formula di de Broglie.

A partire dagli anni Sessanta del Novecento, furono realizzati esperimenti di interferenza di elettroni attraverso due o più fenditure, fisiche o virtuali. Il lavoro pioneristico di Claus Jönsson [168] fu guasi contemporaneo alla pubblicazione delle Lezioni in cui Feynman trattò quantitativamente l'interferenza di elettroni attraverso due fenditure puntiformi con il formalismo adattato nella sezione IV.9.3 all'interferenza di fotoni. Feynman considerava la sua trattazione come concernente un esperimento ideale: evidentemente, non era a conoscenza del lavoro di Jönsson, lavoro che fu, peraltro, sostanzialmente ignorato dalla comunità scientifica. Solo nel 1974, in un editoriale dell'American Journal of Physics, Anthony French e Edwin Taylor hanno richiamato l'attenzione sull'importanza concettuale di questo esperimento [169]. Nel frattempo, Oriano Donati, Gian Franco Missiroli e Giulio Pozzi, realizzarono a Bologna, un esperimento di interferenza di elettroni attraverso due fenditure virtuali [170]. Un fascio di elettroni monoenergetici di un microscopio elettronico passa attraverso due lastre metalliche collegate a terra (V = 0); tra le due lastre è posto un sottile filo conduttore mantenuto ad un potenziale $\Delta V \ge 0$ rispetto alle lastre. Il filo conduttore divide il fascio originario in due e crea una regione di sovrapposizione per i due fasci. Si ottiene così una situazione sperimentale analoga a quella prodotta, per la luce, dal 'cartoncino' nell'esperimento di Young ($\Delta V = 0$) (pagina 102) o da un biprisma di Fresnel ($\Delta V > 0$) (pagina 104): in quest'ultimo caso, si parla di biprisma elettronico. L'intensità del fascio di elettroni era tale che «...la distanza media tra due elettroni che incidono sulla lastra finale è maggiore di 200 metri» e, quindi, in media, solo un elettrone alla volta attraversa l'apparato di misura. Successivamente, Pier Giorgio Merli, Missiroli e Pozzi ripeterono l'esperimento variando il flusso di elettroni in modo da passare da una situazione in cui gli elettroni arrivano in modo casuale sullo schermo di rivelazione, a quella in cui compaiono nitide frange di interferenza [171]. Questi esperimenti sono documentati in un film didattico [172]. In tempi più recenti, un gruppo di ricercatori della Itachi ha realizzato, con tecnolo-

Capitolo IV - La luce

gie più avanzate, un esperimento [173] ed un film [174] simile a quello del gruppo di Bologna (in cui però manca il passaggio dinamico mostrato dai ricercatori italiani) ³¹. Entrambi gli esperimenti (Bologna e Hitachi) mostrano che le frange di interferenza sono il prodotto dell'arrivo sullo schermo rivelatore di un un numero statisticamente significativo di *elementi discreti* (particelle) ³².

Nel 1930, Immanuel Easterman e Otto Stern avevano ottenuto, per la prima volta, figure di diffrazione di atomi di elio e molecole di idrogeno mediante riflessione da parte di cristalli, di NaCl e LiF [176]. In tutti questi esperimenti, i reticoli cristallini avevano svolto il ruolo di reticoli di diffrazione, così come era stato per la prima volta scoperto nel 1912 da Max von Laue [177] per i raggi X.

A differenza dei raggi X e degli elettroni che interagiscono, essenzialmente, con gli elettroni del campione, i neutroni interagiscono con i nuclei e, magneticamente, con i dipoli magnetici atomici. L'uso della diffrazione di neutroni per lo studio delle proprietà dei materiali si è sviluppata a partire dalla fine della seconda guerra mondiale [178, 179].

L'interferometria atomica ha avuto un rigoglioso sviluppo dopo il primo esperimento di diffrazione attraverso due fenditure [180], eseguito nel 1991. La teoria dell'interferenza di atomi si basa su trattazioni analoghe, anche se più complesse, a quella sviluppata nella sezione IV.9.3. Si deve però tenere conto del fatto che la fase che compare nell'ampiezza di probabilità dipende dalle interazioni cui è sottoposta la particella. Ciò non deve sorprendere. Per esempio, nel caso di fotoni che si propagano in un mezzo materiale, la differenza di fase tra due cammini diversi dipende anche dall'indice di rifrazione del mezzo. Nel caso degli atomi, l'interazione cui è sottoposto l'atomo introduce una alterazione nella fase dell'ampiezza di probabilità data da $\Delta \phi = U \Delta t / \hbar$ dove U è l'energia di interazione e Δt la durata dell'interazione. L'interferometria atomica presenta, tuttavia, problemi sperimentali formidabili: si tratta infatti di costruire interferometri adatti agli atomi. Nel caso dei fotoni, si possono usare specchi per deflettere un fascio o specchi semi - argentati per dividere un fascio in due; si può operare in aria e il flusso di fotoni è elevato $(10^{16}/s)$. Gli elettroni possono essere deviati da campi elettrici e magnetici statici: è quindi possibile costruire elementi 'ottici' per gli elettroni. Si pensi, per esempio, al microscopio elettronico o al biprisma

³¹I ricercatori giapponesi citano il film dei ricercatori italiani ma non i loro articoli.

³²I lavori del gruppo di Bologna sono stati discussi in [175, p. 70] e, più approfonditamente, in [87, p. 186 - 190].

elettronico. Nel caso degli atomi il flusso è basso $(10^9/s)$ o $10^5/s$, se si usano condensati di Bose - Einstein. Gli atomi tendono ad aderire ad una superfice, invece di attraversarla o rimbalzare su di essa; pertanto, per suddividere il fascio atomico originario, è necessario usare reticoli di diffrazione al posto di specchi o di specchi semi - argentati e i reticoli debbono essere costruiti artificialmente. Queste difficoltà hanno ostacolato lo sviluppo della interferometria atomica sin verso gli anni Novanta del secolo scorso. Successivamente, l'uso di laser e delle nano - tecnologie hanno permesso di costruire due tipi di reticoli di diffrazione per gli atomi: onde elettromagnetiche stazionarie (laser); sottili reticoli di diffrazione per trasmissione (nano - tecnologie). Per una rassegna su questi sviluppi e le possibili applicazioni si può vedere [181].

Siamo ora in grado di sviluppare qualche considerazione epistemologica sulle due formule magiche. Come abbiamo visto, quella di Einstein affonda le sue radici concettuali nell'elettromagnetismo maxwelliano, nella teoria della radiazione di corpo nero e nei processi di emissione di energia da parte di atomi e nuclei. Invece, l'ipotesi di de Broglie, rimane come sospesa al di sopra della conoscenza acquisita. La lunghezza d'onda che compare nella formula $\lambda_{dB} = h/p$ rimane pur sempre la lunghezza d'onda di un'onda (fittizia o non materiale, come l'aveva chiamata de Broglie) che viene misurata nei fenomeni di interferenza: ma non possiamo affermare che l'onda considerata esista nel Mondo perché la sua velocità di propagazione è superiore a quella della luce. Peraltro, le proprietà del pacchetto d'onde costruito da de Broglie non sono mai utilizzate nella descrizione dei fenomeni di interferenza: il pacchetto d'onda può guindi essere eliminato senza alterare la capacità predittiva della formula magica ³³. Infine, essa descrive una proprietà delle particelle che dipende dalla loro velocità; è quindi diversa dalle loro proprietà intrinseche come, per esempio, la massa e la carica elettrica.

³³Quindi, in questo contesto e sulla base dei criteri suggeriti nella sezione I.2 per riconoscere significato fisico ad un concetto, dobbiamo concludere che al pacchetto d'onde di de Broglie possiamo attribuire significato fisico solo sulla base del criterio debole (aumenta la capacità descrittiva della teoria). A queste considerazioni possono essere applicate, con i necessari adattamenti, le riflessioni di Hertz quando scriveva: «Se desideriamo dare più colore alla teoria, non c'è nulla che ci impedisca di farlo e di stimolare le capacità della nostra immaginazione con rappresentazioni concrete delle varie concezioni quali la natura della polarizzazione elettrica, della corrente elettrica, ecc. Ma l'accuratezza scientifica richiede saggiamente di non confondere la semplice e familiare figura, che ci è presentata dalla natura, con i brillanti ornamenti con cui eravamo abituati a vestirla. Di nostro arbitrio non possiamo in alcun modo modificare la prima; possiamo invece scegliere come ci piace il taglio ed il colore degli altri [11, p. 28].»

Queste ultime considerazioni, congiunte alla domanda ancora senza risposta (perché, in taluni contesti sperimentali, quando il numero di fotoni è sufficientemente elevato possiamo descriverli come un'onda) suggeriscono che è necessaria una rielaborazione delle nostre descrizioni della radiazione e della materia. La storia insegna che quando ci sono nodi concettuali irrisolti essi debbono, prima o poi, essere sciolti: non è saggio adagiarsi sulla capacità predittiva delle teorie. Il disagio intellettuale espresso da Einstein nell'incipit del lavoro sui quanti di luce rimane ancora vivo, anche se oggi lo riformuleremmo in modo diverso.

IV.12 Costanti universali

L'unità elementare di azione h è stata introdotta da Planck nel dicembre del 1900. Planck l'aveva denotata come una 'costante della natura' (pagina 104) ed il suo valore numerico era già comparso in un precedente lavoro in cui Planck proponeva una nuova derivazione della legge cosiddetta di Wien [100, p. 145]. In questo lavoro, Planck scriveva la formula di Wien nella forma:

$$u(v,T) = \frac{8\pi v^3}{c^3} b e^{-av/T}$$
(IV.169)

dove *a* e *b* erano due 'costanti universali'. Secondo Planck, l'universalità di queste costanti era dovuta al fatto che la legge della radiazione di corpo nero, essendo indipendente dalla natura del corpo, non poteva che contenere 'costanti universali'. Da una ispezione della (IV.169) appare immediatamente che *b* = *h* e *a* = *h*/*k*_{*B*}. Planck propone quindi l'uso di un nuovo sistema di unità di misura basato su quattro costanti universali: oltre ad *a* e *b*, la costante di gravitazione *G* e quella della velocità della luce nel vuoto *c*. In notazione contemporanea, le unità di misura proposte da Planck sono mostrate nella tabella IV.2 ³⁴.

Il modello cosmologico del *Big Bang* descrive l'evoluzione dell'Universo a partire (circa) dall'unità di tempo di Planck ($\approx 10^{-43} s$), quando la sua temperatura era circa quella di Planck ($\approx 10^{32}$ K), e l'energia media dei fotoni era prossima all'energia di Planck ($m_p c^2 \approx 10^{19} GeV$). Il ruolo di queste costanti nella cosmologia contemporanea non avrebbe sorpreso Planck che scriveva:

³⁴Nella tabella del NIST, compaiono, oltre alle unità di misura di Planck, la velocità della luce nel vuoto *c* (assunta convenzionalmente come esatta), la costante magnetica μ_0 (esatta), La costante elettrica $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$ (esatta), l'impedenza caratteristica del vuoto $Z_0 = \mu_0 c$ (esatta), la costante di gravitazione universale *G* e la costante di Planck *h*.

Giuseppe Giuliani - Elettromagnetismo relatività quanti

unità di lunghezza	l_P	$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616229(38) \times 10^{-35} \mathrm{m}$
unità di tempo	t_P	$\sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.39116(13) \times 10^{-44} \mathrm{s}$
unità di massa	m_P	$\sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176470(51) \times 10^{-8} \mathrm{kg}$
unità di temperatura	T_P	$\frac{1}{k_B}\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1.416808(33) \times 10^{32} \mathrm{K}$

Tabella IV.2. Unità di misura di Planck. Fonte: NIST.

È interessante osservare che le costanti *a* e *b*...offrono la possibilità di individuare nuove unità di misura per la lunghezza, la massa ed il tempo, che, indipendentemente da corpi particolari o particolari circostanze, mantengono necessariamente il loro significato per tutti i tempi e tutte le culture, anche per forme di vita extraterrestri o non - umane, e possono pertanto essere considerate come *unità di misura naturali* [100, p. 146].

La scrittura moderna delle unità di misura di Planck prevede l'uso di \hbar invece di h. Ciò rimanda alla questione del ruolo delle due costanti nella descrizione della Natura. \hbar è il valore più piccolo della quantità di moto angolare dei bosoni, mentre $\hbar/2$ è il valore più piccolo della quantità di moto angolare dei fermioni. h entra invece nella relazione che connette la descrizione corpuscolare con quella ondulatoria della luce $E_{ph} = hv$, nella relazione di de Broglie $\lambda_{dB} = h/p$ e nel volume elementare dello spazio delle fasi h^3 . Da un punto di vista formale, h può essere sostituita da \hbar in queste formule. Tuttavia, mentre la scrittura $E_{ph} = \hbar \omega$ sembra tollerabile, scrivere $\lambda_{dB} = 2\pi (\hbar/p)$ appare come artificioso; altrettanto artificioso sarebbe scrivere $\hbar^3 8\pi^3$. Per quanto riguarda l'uso della pulsazione ω al posto della frequenza di un'onda, la frequenza v di un'onda appare essere una grandezza fisica primitiva rispetto alla pulsazione ω . Tuttavia, scriviamo $c = \omega/k$ dove $k = 2\pi/\lambda$ è il vettore d'onda e, in presenza di un pacchetto d'onde, introduciamo la velocità di gruppo $v_g = (d\omega/dk)_{k=k_0}$ dove k_0 è il vettore d'onda intorno al quale è centrato il pacchetto d'onde. Queste considerazioni mostrano che il punto focale è costituito dalla quantizzazione, nel mondo microscopico, della grandezza fisica 'azione' le cui dimensioni sono quelle di una energia moltiplicata per la variabile tempo. L'uso di h o di \hbar è solo una questione di rappresentazione formale.

Le unità di misura *naturali* erano considerate da Planck come insite nella Natura e, per questo motivo, dovrebbero disvelarsi ad ogni intelligenza anche non umana. Anche h era per Planck una costante della Natura. Pertanto, secondo la concezione planckiana quella di h è stata una scoperta, mentre noi l'abbiamo denotata come una invenzione. Da un punto di vista storico, Planck aveva già individuato la costante b, avente le dimensioni di un'azione (energia x tempo) come una costante universale nel lavoro del 1899. Nel dicembre del 1900, la costante *b* fu ribattezzata *h*: ma porre E = hv è stata una invenzione teorica. Se si vuole stabilire una relazione tra una energia e una proprietà di un onda elettromagnetica mediante la costante h, la formula E = hv (o la formula $E = \hbar\omega$) è l'unica possibile per ragioni dimensionali. Ma, essendo h una costante, ciò implica che l'energia può assumere solo valori discreti e questa discretezza era imposta dalla necessità che l'entropia della radiazione contenuta nella cavità non diventasse infinita (pagina 104). Poi, l'invenzione di Planck si è lentamente tramutata - anche attraverso l'invenzione dei quanti di luce e la loro contrastata accettazione – in una scoperta: l'energia della radiazione elettromagnetica è distribuita in modo discreto nello spazio e l'energia degli elementi costitutivi della materia ponderabile in uno stato legato può assumere solo valori discreti. E questa discretezza è regolata dalla costante h o da \hbar .

Capitolo V

Sull'energia

V.1 Energia cinetica ed energia potenziale

La fisica dell'Ottocento ci ha lasciato in eredità i concetti di due forme di energia: l'energia cinetica e l'energia potenziale. L'energia cinetica T ha una espressione semplice ed è sempre positiva:

$$T = \frac{1}{2}M\nu^2 \tag{V.1}$$

dove M è la massa del corpo e v la sua velocità. Nel caso di un sistema composto da più particelle l'energia cinetica è data da (con notazioni ovvie):

$$T = \sum_{i} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{V.2}$$

Per introdurre il concetto di energia potenziale è opportuno, anche se non necessario, passare attraverso il concetto di campo. La variazione dell'energia potenziale ΔU di una particella immersa in un campo di forze conservativo è definita dall'equazione ¹:

$$-\Delta U = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot \vec{d} \, l = \Delta T = T_{B} - T_{A} \tag{V.3}$$

dove l'integrale, che rappresenta il lavoro L compiuto dalle forze del campo, dipende solo dagli estremi della linea di integrazione. D'altra parte, Lè uguale alla variazione dell'energia cinetica della particella tra i punti A e

 $^{^1 \}rm{Un}$ campo vettoriale si dice conservativo quando la sua circuitazione lungo una qualunque linea chiusa è nulla.

B. Dalla (V.3) segue immediatamente che la grandezza T + U, cioè l'energia totale di un sistema fisico è conservata.

La definizione data dalla (V.3) riguarda la variazione di energia potenziale. Tuttavia, nel caso di campi che si annullano all'infinito, è possibile definire il valore dell'energia potenziale in un punto dello spazio. Consideriamo, per esempio, un campo di forze centrale, cioè tale che la sua espressione sia data da:

$$\vec{F} = C \frac{1}{r^3} \vec{r}; \qquad r \neq 0 \tag{V.4}$$

dove *C* è una costante diversa da zero e \vec{r} è il vettore posizione di un generico punto *P*. La grandezza:

$$U = -C\frac{1}{r}; \qquad r \neq 0 \tag{V.5}$$

rappresenta allora il valore dell'energia potenziale nel punto *P*, legata al valore del vettore forza nello stesso punto dalla relazione:

$$\vec{F} = -\text{grad}_{r}U \tag{V.6}$$

L'energia potenziale è definita per sistemi di almeno due particelle interagenti. Un esempio tipico è costituito da due cariche elettriche puntiformi q_1 e q_2 , dove si intende che q_1 e q_2 possono essere positive o negative. L'energia potenziale dovuta alla loro interazione è data da:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \tag{V.7}$$

dove r è la distanza tra le due cariche. Appare subito evidente dalla (V.7) che l'energia potenziale associata a due cariche è positiva se le cariche sono dello stesso segno e negativa se le cariche sono di segno opposto.

Il concetto di energia potenziale è usato anche nella teoria newtoniana della gravitazione. L'energia potenziale associata a due masse sferiche omogenee è data da:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{V.8}$$

dove G è la costante gravitazionale e r la distanza tra i centri delle due masse sferiche. Il concetto di energia potenziale è invece estraneo alla teoria gravitazionale di Einstein: in questa teoria, l'energia potenziale newtoniana compare solo nell'approssimazione di campi gravitazionali deboli e velocità piccole rispetto a quelle della luce. Un'applicazione di questa approssimazione si trova nell'appendice B.5.

V.2 Energia del campo elettromagnetico

Quando la luce viene emessa, una certa quantità di energia viene persa dal corpo luminoso, e, se la luce viene assorbita da un altro corpo, questo corpo viene riscaldato, mostrando che esso ha ricevuto energia dall'esterno. Durante l'intervallo di tempo in cui la luce ha lasciato il primo corpo e prima che essa raggiunga il secondo, essa deve essere esistita come energia nello spazio tra i due corpi [52, p. 384].

James Clerk Maxwell

È ancora un'eredità ottocentesca, di origine maxwelliana, l'idea di associare energia (e quantità di moto) al campo elettromagnetico (e, in generale, ai campi). Si supponga che al campo elettromagnetico sia associata energia e che questa possa spostarsi da una regione all'altra dello spazio. Si indichi con *u* la densità di energia - incognita - del campo elettromagnetico e con \vec{S} il vettore il cui flusso attraverso una superficie chiusa *A* rappresenta l'energia elettromagnetica che, nell'unità di tempo, l'attraversa. Per il principio di conservazione dell'energia si deve scrivere:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau} u\,d\tau = \int_{A}\vec{S}\cdot\hat{n}\,dA + \int_{\tau}\vec{E}\cdot\vec{J}\,d\tau \tag{V.9}$$

dove τ è il volume delimitato dalla superficie *A* e l'ultimo integrale rappresenta il lavoro compiuto dal campo elettromagnetico, nell'unità di tempo, sulle cariche contenute nel volume τ . Sviluppando i calcoli, si mostra che due possibili espressioni per \vec{S} e *u* sono date da [29, p. 116 -120]:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \tag{V.10}$$

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$
 (V.11)

Tuttavia, questa possibile coppia di espressioni *non è unica*. Infatti il vettore \vec{S} , detto vettore di Poynting, dato dalla (V.10) è definito a meno di un campo vettoriale a divergenza nulla; analogamente, la grandezza *u* data dalla (V.11) è definita a meno di una costante arbitraria. L'aggiunta a \vec{S} di un campo vettoriale a divergenza nulla non altera il suo flusso attraverso una superficie chiusa, non viola cioè la conservazione dell'energia che sta alla base del teorema di Poynting (equazione (V.9)). Tuttavia, questa aggiunta porterebbe

ad un flusso di energia non nullo attraverso una superficie non chiusa anche in assenza di un campo elettromagnetico. Per quanto riguarda invece la costante additiva all'espressione della densità di energia (V.11), si osservi che questa costante, se diversa da zero, porterebbe a valori della densità di energia non nulli anche in assenza di campo elettrico e magnetico. Infine, le espressioni date dalle (V.10) e (V.11), in cui si assumono nulli il campo vettoriale a divergenza nulla e la costante arbitraria, sono state trovate in accordo con le osservazioni sperimentali.

Nel caso di un'onda elettromagnetica nel vuoto, la direzione del vettore di Poynting coincide con quella della propagazione dell'onda e si 'sposta' con velocità c: ciò implica che l'energia associata al campo elettromagnetico si propaga con la stessa velocità.

Il modulo del vettore di Poynting di un'onda può essere espresso in funzione di *E* o di *B*, usando la relazione B = E/c. Si ha, per esempio, nel vuoto:

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2$$

e, se l'onda è sinusoidale:

$$\langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{E_0^2}{2}$$

dove la media è effettuata su un periodo ed E_0 è il valore massimo del campo elettrico. Nel caso in cui si tratti di onde sferiche generate da una sorgente puntiforme, l'energia media che attraversa, nell'unità di tempo, una superficie sferica di raggio r e avente il centro nella sorgente è quindi proporzionale ad E_0^2 ; siccome, d'altra parte, $E_0 \propto 1/r$ (equazione (III.16)), questa energia è la stessa qualunque sia il raggio della sfera.

Con una procedura analoga si può individuare una coppia di grandezze costituita dalla quantità di moto per unità di volume \vec{g} associabile al campo elettromagnetico e dalla quantità di moto 'trasportata' (quantità di moto che attraversa la superficie unitaria nell'unità di tempo). Per la densità di quantità di moto si trova:

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S} = \varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B}) \tag{V.12}$$

Nel caso di un'onda piana, è possibile dare un immediato significato fisico alla (V.12). Si supponga infatti che un'onda piana venga completamente assorbita da una parete disposta perpendicolarmente alla sua direzione di propagazione: alla parete viene completamente trasferita sia l'energia sia la quantità di moto dell'onda. Indicando con p il modulo della quantità di moto della parete si ottiene, per una superficie unitaria:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} \tag{V.13}$$

Ricordando che dp/dt = F, dove F è il modulo della forza che si esercita sulla parete, si conclude che il secondo membro della (V.13) rappresenta la *pressione esercitata dalla radiazione* sulla parete. Se invece di essere completamente assorbita, la radiazione elettromagnetica fosse completamente riflessa, la quantità di moto trasferita alla parete sarebbe doppia di quella appena calcolata.

È inoltre possibile definire una densità del momento angolare di un'onda elettromagnetica \vec{J} mediante la relazione:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{g} = \varepsilon_0 [\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})] \tag{V.14}$$

Il suo valore dipende dalla distribuzione spaziale della quantità di moto associata all'onda. Nel caso di un'onda piana, \vec{J} è sempre nullo, per ragioni di simmetria: il generico contributo $\vec{r} \times \vec{g}$ è annullato dal contributo $-\vec{r} \times \vec{g}$.

Recenti trattazioni teoriche e indagini sperimentali hanno mostrato che, in particolari fasci di luce laser, è possibile separare il contributo al momento angolare della luce derivante dal momento angolare intrinseco (spin) dei fotoni e dalla distribuzione spaziale dell'energia e della fase dell'onda; quest'ultimo è chiamato *momento angolare orbitale* e i suoi valori possibili 'per fotone' sono multipli interi di \hbar^2 .

V.3 Massa e energia nella relatività speciale

La conseguenza più importante della teoria della relatività speciale riguardava le masse inerti dei corpi. Divenne evidente che l'inerzia di un sistema dipende necessariamente dal suo contenuto di energia; e questo ha condotto direttamente alla nozione che la massa inerte è semplicemente energia latente. Il principio della conservazione della massa perse la sua indipendenza e si congiunse con quello della conservazione dell'energia [183].

Albert Einstein

²Per una introduzione a questi argomenti, si può vedere [182].

Capitolo V - Sull'energia

La grandiosa importanza concettuale della teoria della relatività, come contributo ad una più profonda comprensione dei rapporti tra spazio e tempo, e le vivaci e spesso appassionate discussioni a cui essa ha in conseguenza dato luogo anche fuori degli ambienti strettamente scientifici, hanno forse un po' distolta l'attenzione da un altro suo risultato che, per esser meno clamoroso e, diciamolo pure, meno paradossale, ha tuttavia nella fisica conseguenze non meno degne di nota, ed il cui interesse è verosimilmente destinato a crescere nel prossimo svilupparsi della Scienza. Il risultato a cui accenniamo è la scoperta della relazione che lega la massa di un corpo alla sua energia [184].

Enrico Fermi

L'innovazione di maggior rilievo introdotta dalla relatività speciale è costituita dalla attribuzione ad una massa m di una energia, detta energia a riposo, data da ³:

$$E_0 = mc^2 \tag{V.15}$$

La singolarità di questa formula è costituita dalla presenza di *c*, cioè della velocità della luce nel vuoto, velocità che, come è noto, è una velocità limite. Nella dinamica relativistica, la formula (V.15) è ottenuta nel modo seguente. L'energia di una particella di massa *m* è data da $E = \gamma mc^2 + A$, dove *A* è una costante da determinarsi (equazione (B.23)). Imponendo che, per $v \ll c$ la componente *x* della quantità di moto coincida con quella newtoniana, si ottiene che la costante *A* deve essere nulla. Quindi: $E = \gamma mc^2$ che, per v = 0, diventa $E_0 = mc^2$.

A questo proposito, è interessante osservare come il termine mc^2 compaia in una trattazione con la dinamica newtoniana dell'assorbimento (o emissione) di un fotone da parte di un atomo (appendice B.4). Precisamente, il termine mc^2 compare nella formula dell'energia di rinculo dell'atomo: $E_R = \Delta E^2/2mc^2$, dove ΔE è la differenza tra le energie dei due livelli coinvolti nella transizione. La comparsa del termine mc^2 è dovuto al fatto che nell'equazione di conservazione della quantità di moto viene inserito il termine E_{ph}/c del fotone. È quindi possibile attribuire alla massa m l'energia a riposo mc^2 sulla base dell'espressione dell'energia di rinculo ricavata con la dinamica newtoniana.

 E_0 può essere misurata misurando *m* e *c*. Si osservi che, in generale, queste due misure non sono indipendenti, perché alcuni procedimenti di misura della massa di una particella richiedono la conoscenza del valore di

³In questo capitolo, come in altri, usiamo formule senza ricavarle. Nell'appendice B.2, la dinamica relativistica è sviluppata in dettaglio.

c: un caso tipico è la misura della massa di uno ione con uno spettrometro di massa. L'energia E_0 può essere resa disponibile, per esempio, mediante un processo di annichilazione di un elettrone e un positrone: le energie a riposo delle due particelle si trasformano nell'energia dei due fotoni gamma prodotti.

Se la massa m è in moto con velocità v, la sua energia è data da:

$$E = \gamma m c^2; \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
 (V.16)

e la sua energia cinetica da:

$$T = \gamma mc^{2} - mc^{2} = mc^{2}(\gamma - 1)$$
 (V.17)

Se $v \ll c$, l'energia cinetica della massa assume la forma newtoniana $T \approx (1/2)mv^2$.

Siccome nella relatività speciale le interazioni fisiche si propagano con velocità finita, l'uso del concetto di energia potenziale è sottoposto ad alcune severe condizioni. L'energia potenziale dipende dalla distanza relativa tra le particelle. Se questa distanza non varia nel tempo, l'uso dell'energia potenziale è legittimo perché la sua espressione non dipende dal tempo. Tuttavia, questa configurazione statica non descrive alcuna situazione fisica reale e può essere presa in considerazione solo in alcuni casi ideali⁴. Consideriamo, per fissare le idee, l'interazione tra due particelle: la forza esercitata dalla particella 1 sulla particella 2 all'istante *t* dipende dalla distanza relativa tra le due particelle ad un istante precedente, il cui valore dipende dalla velocità di propagazione dell'interazione. Esemplare è il caso del campo elettromagnetico generato da una carica puntiforme in moto qualunque, discusso a partire da pagina 70.

Un caso diverso è rappresentato dalla trattazione dell'atomo di idrogeno da parte della meccanica ondulatoria non relativistica. L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, assume, in questo caso, la forma:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi(r,\theta,\phi) = E\psi(r,\theta,\phi)$$
(V.18)

In questa equazione ⁵, il termine di energia potenziale non dipende dal tempo: si assume quindi implicitamente che l'interazione coulombiana si pro-

⁴Si veda, per esempio, l'appendice B.5.

⁵In realtà, l'atomo di idrogeno viene trattato considerando l'elettrone, dotato della massa ridotta $\mu = m_p m_e / (m_p + m_e)$, posto in un campo centrale di tipo coulombiano: questa approssimazione è possibile perché $m_p \gg m_e$.

Capitolo V - Sull'energia

paghi con velocità infinita. È interessante, da questo punto di vista, prendere in considerazione la formula dei livelli di energia permessi per l'elettrone dell'atomo di idrogeno, secondo la teoria quantica relativistica di Dirac:

$$E \approx -\frac{1}{n^2} \frac{\mu e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$
(V.19)

dove

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \tag{V.20}$$

è la *costante*, adimensionale, *di struttura fine* e $j = l + s^{6}$. La formula di Bohr per i livelli energetici dell'atomo di idrogeno, identica a quella derivata dall'equazione di Schrödinger agli stati stazionari (V.18), si ottiene da quella di Dirac (V.19) ponendo $\alpha = 0$. La formula di Dirac approssimata (V.19) può essere ricavata anche aggiungendo ai valori permessi dell'energia - che si ottengono con la trattazione quantica non relativistica - correzioni che tengano conto del fatto che ⁷:

- 1. la dinamica usata deve essere relativistica;
- 2. l'elettrone possiede uno spin; questa correzione è nulla per l > 0;
- 3. c'è una interazione tra il momento magnetico intrinseco dell'elettrone e il suo momento magnetico orbitale (interazione *spin - orbita*); questa correzione è nulla per l = 0.

La correzione relativistica di cui al punto 1) risulta uguale a:

$$-\frac{1}{n^2}\frac{\mu e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\left[\frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{l+1/2}-\frac{3}{4n}\right)\right]$$

con l = 0, 1...n - 1. Per lo stato fondamentale, questa correzione è pari a $\approx 6.66 \times 10^{-5}$ del valore previsto dall'equazione di Schrödinger. Questo dato è una misura dell'approssimazione introdotta nell'equazione degli stati stazionari dall'ipotesi che interazione coulombiana si propaghi con velocità infinita.

⁶Nella formula compare il segno \approx invece di quello di uguaglianza perché sono stati trascurati i termini contenenti potenze superiori di α (il primo termine successivo dipende da α^4). Il numero quantico azimutale *l* può assumere i valori 0, 1, 2, ... *n* – 1; il numero quantico di spin *s* i valori ±1/2.

⁷Si veda, per esempio, [186, p. 258 - 260].

La discussione sull'atomo di idrogeno suggerisce che, nel caso di particelle atomiche o subatomiche composte, è possibile usare il concetto di energia potenziale se, *dato uno stato quantico della particella*, si considerano i valori medi (di aspettazione) dell'energia potenziale e cinetica. L'energia a riposo di una particella composta è allora data da:

$$E_0 = \sum_i m_i c^2 + \langle T \rangle + \langle U \rangle = M c^2 \tag{V.21}$$

dove m_i , < T > e < U > sono, rispettivamente, la massa della particella i esima, l'energia cinetica media e l'energia potenziale media del sistema di particelle, ed *M* la massa della particella composta ⁸. Ne segue che:

$$M = \sum_{i} m_{i} + \frac{1}{c^{2}} (\langle T \rangle + \langle U \rangle)$$
(V.22)

La massa di una particella composta *non* è uguale alla somma delle masse delle particelle che la costituiscono. In particolare, per un sistema costituito da due particelle, nel passaggio da uno stato in cui le particelle sono a distanza infinita ed in quiete ad uno stato in cui le particelle interagiscono con energia potenziale negativa (attrazione), la massa del sistema diminuisce. I risultati, per particelle elementari o composte, sono riassunti nella tabella V.1.

Tipo di particella	Massa	Energia a riposo
Elementare	m	$E_0 = mc^2$
Composta	$M = \sum_{i} m_{i} + (< T > + < U >)/c^{2}$	$E_0 = \sum_i m_i c^2 + < T > + < U >$

Tabella V.1. Massa ed energia nella relatività ristretta per particelle elementari o composte in quiete.

Tornando all'atomo di idrogeno, allo stato fondamentale corrisponde un'energia pari –13.61 eV, e lo zero di energia corrisponde alla configurazione del protone e dell'elettrone a distanza infinita ed in quiete. Dalla tabella V.1, si deduce che la massa dell'atomo nello stato fondamentale è minore della somma delle masse del protone e dell'elettrone infinitamente lontani e in quiete. Questa differenza di massa, trascurabile nel caso dell'atomo di idrogeno ⁹, gioca invece un ruolo fondamentale nei processi di fissione o di

⁸Naturalmente, questa equazione presuppone che l'energia potenziale delle particelle infinitamente lontane sia posta uguale a zero.

⁹Nel caso dell'atomo di idrogeno, il difetto di massa è pari a $1.44 \times 10^{-8} \times (m_p + m_e)$.

fusione nucleare. L'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno può essere scritta come:

$$E_1 = \langle T_1 \rangle + \langle U_1 \rangle = \frac{1}{2} \langle U_1 \rangle$$
(V.23)

perché, per il cosiddetto teorema del viriale, $\langle T_n \rangle = -(1/2) \langle U_n \rangle$ (*n* numero quantico principale). L'equazione (V.23) mostra come *l'energia potenziale sia legata al difetto di massa di una particella composta*: $\Delta m = \langle U_1 \rangle /(2c^2)$. Tuttavia, questa relazione deve essere interpretata correttamente ¹⁰. Il difetto di massa che compare durante la formazione dell'atomo di idrogeno partendo dalle particelle costituenti è dovuto, classicamente, all'irraggiamento continuo dell'elettrone accelerato e, quanticamente, all'emissione discreta di fotoni da parte dell'atomo durante la sua formazione. La conservazione dell'energia durante la formazione dell'atomo di idrogeno si scrive:

$$\Delta U + \Delta T + E_{rad} = 0 \to \Delta U + \Delta T = -E_{rad} \tag{V.24}$$

dove E_{rad} rappresenta l'energia emessa sotto forma di radiazione elettromagnetica. Quindi il difetto di massa dell'atomo di idrogeno è causato dall'emissione della radiazione durante il processo di cattura. La formula (V.23) mostra che il difetto di massa dell'atomo di idrogeno, può essere descritto in termini di energia potenziale.



Figura V.1. Energia media di legame per nucleone in funzione del numero di massa *A* (numero dei nucleoni).

¹⁰Applichiamo qui il concetto di interpretazione adottato a pagina 12.

Un'analisi dello stesso tipo vale anche per le reazioni nucleari di fissione e fusione: quella che viene posta in gioco è la massa associata all'energia (< T > + < U >) delle particelle costituenti i nuclei e non la loro massa.

L'equazione (V.22) spiega come possa essere liberata energia nei processi di fissione e fusione nucleare. Se un nucleo di massa M contiene N_p protoni e N_n neutroni, l'energia di legame media E_l per nucleone (protone o neutrone) del nucleo è definita nel modo seguente:

$$E_{l} = -\frac{[M - (N_{p}m_{p} + N_{n}m_{n})]}{N_{p} + N_{n}}c^{2}$$
(V.25)

dove m_p è la massa del protone e m_n la massa del neutrone. L'energia liberata durante una reazione di fissione o fusione è allora:

$$E = N(E_l^f - E_l^i) \tag{V.26}$$

dove N è il numero dei nucleoni coinvolti nella reazione e E_l^i , E_l^f l'energia media di legame per nucleone iniziale e finale. L'energia media di legame per nucleone in funzione del numero di massa aumenta sino al valore di circa 8.7 *MeV*, in corrispondenza del numero di massa (numero dei nucleoni) 56, per poi diminuire gradualmente (figura V.1). Pertanto, la fusione di due nuclei leggeri e la fissione di un nucleo pesante opportunamente scelti libera energia (sotto forma di energia cinetica e di fotoni).

Ci sono tuttavia processi in cui è messa in gioco la massa totale delle particelle: sono le reazioni particella - antiparticella, per esempio elettrone - positrone. In queste reazioni la coppia particella - antiparticella, scomparendo, dà origine ad una coppia di fotoni ¹¹.

Nel caso di un sistema fisico composto da più particelle il quadrato del quadrivettore energia - impulso – che ha lo stesso valore in ogni SRI – assume la forma:

$$\vec{\mathscr{P}}^{2} = \frac{1}{c^{2}} \left(\sum_{i} E_{i} \right)^{2} - \left(\sum_{i} \vec{p}_{i} \right)^{2}$$
(V.27)

Se si pone uguale a M^2c^2 il secondo membro della (V.27), *si definisce* la massa M (invariante) del sistema fisico composto da più particelle. Per calcolare M è conveniente scegliere il *SRI* in cui la quantità di moto totale del sistema $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ è nulla. Si ottiene allora:

$$M = \frac{1}{c^2} \sum_{i} E_i = \frac{E}{c^2}$$
(V.28)

¹¹È anche possibile il processo inverso in cui un fotone, interagendo con un nucleo, dà origine ad una coppia elettrone - positrone.

L'equazione (V.27) è una equazione della dinamica relativistica di una particella massiva (dotata di massa a riposo). Essa si ricava partendo dal postulato della dinamica relativistica:

$$\vec{\mathscr{F}} = \frac{d\vec{\mathscr{P}}}{d\tau} \tag{V.29}$$

ove $\vec{\mathscr{F}}$ è la quadriforza, $\vec{\mathscr{P}}$ il quadrivettore quantità di moto e τ il tempo proprio. Pertanto, le equazioni che si ricavano partendo dalla (V.29), incluse la (IV.53) e la (V.27), valgono solo per particelle massive che sono quelle entità teoriche che obbediscono alla (V.29).

V.4 Massa e inerzia

Nella dinamica newtoniana la massa è interpretata come misura della resistenza che un corpo oppone alla variazione della sua velocità. Infatti, nella dinamica newtoniana, la legge del moto può essere scritta sotto la forma:

$$\vec{f} = m^i \frac{d\vec{v}}{dt} = m^i \vec{a} \tag{V.30}$$

dove abbiamo aggiunto alla lettera m l'apice i per sottolineare il fatto che m^i rappresenta la *massa inerziale*, cioè il parametro che misura la resistenza di un corpo alla variazione della sua velocità. Nella fisica newtoniana, la massa compare anche nella legge di gravitazione universale:

$$\vec{f}_{12} = G \, \frac{m_1^g m_2^g}{r_{21}^3} \, \vec{r}_{21} \tag{V.31}$$

dove l'apice g intende richiamare il fatto che, in linea di principio, la *massa* gravitazionale può essere diversa dalla massa inerziale. L'osservazione sperimentale mostra che l'accelerazione di un corpo in caduta libera, cioè di un corpo sottoposto *solo* ad una attrazione gravitazionale è la stessa per tutti i corpi: è cioè indipendente dalla loro forma o composizione. Questo risultato, congiunto alle due ultime equazioni, conduce immediatamente ad una relazione di proporzionalità tra $m^g e m^i$: $m^g = \alpha m^i$. Le teorie moderne della gravitazione postulano che sia $\alpha = 1$, cioè che $m^g = m^i = m$ (principio di equivalenza debole)^{12,13}.

 $^{^{12}}$ Per la precisione, si dovrebbe dire che si assume che la massa *m* che compare nella definizione del quadrivettore quantità di moto di una particella, coincide con la massa gravitazionale della stessa particella. La relatività speciale, infatti, non usa il concetto di massa inerziale.

¹³Il principio di equivalenza debole può anche essere enunciato affermando che, localmente, un campo gravitazionale è indistinguibile da un campo di accelerazione. Se si colloca

Giuseppe Giuliani - Elettromagnetismo relatività quanti

Nella relatività speciale la massa di un corpo è invece intesa come una misura dell'energia in esso contenuta: quindi la massa non è più una misura dell'inerzia del corpo. Come mostrato nell'appendice B.2 (pagina 268), l'equazione (tridimensionale) di moto di un corpo di massa *m* ha la stessa forma dell'equazione newtoniana:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{V.32}$$

La differenza sostanziale tra le due dinamiche è nascosta nella definizione della quantità di moto \vec{p} : $\vec{p} = m\vec{v}$ nella dinamica newtoniana e $\vec{p} = m(\gamma \vec{v})$ nella dinamica relativistica (pagina 268). Quindi, nella dinamica relativistica, l'equazione di moto esplicita assume la forma:

$$\vec{f} = \frac{d[m(\gamma \vec{v})]}{dt} = m \frac{d(\gamma \vec{v})}{dt}$$
(V.33)

Questa equazione mostra che l'inerzia dipende non solo dalla massa *m* (invariante) ma anche dalla dipendenza temporale della componente spaziale del quadrivettore velocità $\gamma \vec{v}$ (pagina 266). La difficoltà di aumentare la quantità di moto del corpo, difficoltà crescente con la velocità, è dovuta al fattore γ che compare nella componente spaziale del quadrivettore velocità, fattore che racchiude in sé il fatto che *c*, la velocità della luce nel vuoto, è una velocità limite.

In letteratura si trovano numerosi articoli riguardanti l'opportunità di usare il concetto di massa relativistica. Questa è definita dall'equazione:

$$m_{rel} = \gamma m \tag{V.34}$$

La massa relativistica dipende quindi dalla velocità e richiede di riscrivere l'equazione del moto nella forma seguente ¹⁴:

$$\vec{f} = \frac{d[(\gamma m)\vec{v}]}{dt} \tag{V.35}$$

Il lettore interessato a questo dibattito, può iniziare dal bel lavoro di Giulio Passatore [185] e, successivamente, affrontare la bibliografia ivi contenuta. Qui, ci limitiamo ad osservare che:

un accelerometro in un punto della superficie terrestre in cui l'accelerazione gravitazionale è *g*, l'accelerometro segna una accelerazione *g* diretta verso l'alto.

¹⁴Si noti la differente collocazione del fattore γ nelle formule (V.33) e (V.35).
- La massa relativistica può, effettivamente, essere considerata come una misura del contenuto di energia di un corpo in quiete o moto: $E = (\gamma m)c^2 = m_{rel}c^2$.
- La massa relativistica soddisfa l'equazione $\vec{p} = (E/c^2)\vec{v}$. Questa equazione risulta valida anche per i fotoni: $\vec{p} = (E/c^2)\vec{c} = (E/c)(\vec{c}/c)^{15}$.

Tuttavia, il concetto di massa relativistica, appare superfluo e fuorviante. Non è dunque un caso se, guardando al concetto di massa relativistica alla luce dei criteri che attribuiscono significato fisico ad una grandezza fisica (pagina 11), dobbiamo osservare che questo concetto non accresce la capacità predittiva o descrittiva della teoria. Il concetto di massa relativistica non ha quindi significato fisico e può essere espunto dalle nostre descrizioni.

V.5 I fotoni

Un fotone possiede energia $E_{ph} = hv$ e quantità di moto lineare p = hv/c. Un fotone polarizzato circolarmente possiede anche una quantità di moto angolare intrinseca pari a \hbar , rappresentabile mediante un vettore diretto nella direzione di propagazione del fotone (polarizzazione destrorsa) o nella direzione opposta (polarizzazione sinistrorsa).

Ai fotoni non si applica la legge fondamentale della dinamica relativistica (V.29) e, quindi, anche la (IV.53) da essa derivata. Ciò non ostante, la (IV.53) è normalmente usata in letteratura per i fotoni, considerati come particelle relativistiche di massa nulla. L'estensione ai fotoni di questa equazione deve, comunque, essere usata con cautela critica. Per chiarire questo punto, partiamo dai risultati ben consolidati riguardanti l'emissione o l'assorbimento di fotoni da parte di un atomo o nucleo (sezione IV.7.2).

Se un atomo E inizialmente in quiete emette un fotone, l'energia del fotone emesso è data da (equazione (IV.77), pagina 139):

$$E^0_{ph} = \Delta E^{emi} - E_R \tag{V.36}$$

 ΔE^{emi} è la differenza in energia tra i due livelli della transizione quantica ed E_R è l'energia di rinculo dell'atomo ¹⁶. La massa dell'atomo diminuisce di un valore pari a $\Delta E^{emi}/c^2$ durante l'emissione: questo difetto di massa

¹⁵Questa relazione è stata usata da Stark nel 1909 per descrivere la produzione di un quanto di raggi X nell'anticatodo (pagina 126). Tuttavia, nella trattazione di Stark, la quantità di moto per particelle dotate di massa a riposo è quella newtoniana.

 $^{^{16}}$ L'equazione (V.36) è una approssimazione valida se $\Delta E^{emi} \ll mc^2$, dove m è la massa dell'atomo non eccitato (pagina 139).

si ritrova nell'energia del fotone E_{ph}^0 e nell'energia di rinculo E_R dell'atomo. Un atomo *A* identico all'atomo *E*, non eccitato e in quiete, può assorbire il fotone emesso da *E* (risonanza) se è soddisfatta l'equazione:

$$\Delta E^{emi} - E_R = \Delta E^{abs} + E_R \tag{V.37}$$

cioé se:

$$\Delta E^{emi} - \Delta E^{abs} = 2E_R \tag{V.38}$$

Il fenomeno della risonanza implica che l'energia di transizione tra due livelli energetici non sia definita esattamente: come si dice, la riga di emissione (e di assorbimento) ha una larghezza (naturale) non nulla. Pertanto, la larghezza naturale di una riga è una conseguenza diretta della conservazione dell'energia e della quantità di moto insita nell'equazione (V.37) e della possibilità di un assorbimento risonante. Quando l'atomo *A* assorbe il fotone emesso dall'atomo *E*, la sua massa aumenta di una quantità pari a $\Delta E^{abs}/c^2$; tuttavia, durante l'intero processo di risonanza (emissione \rightarrow assorbimento) scompare una massa pari a $(\Delta E^{emi} - \Delta E^{abs})/c^2 = 2E_R/c^2$ e l'energia corrispondente compare sotto forma di energia di rinculo dei due atomi.

Nel 1905, questi meccanismi non erano noti. Infatti, Einstein scriveva:

Se un corpo emette un'energia *L* sotto forma di radiazione, la sua massa diminuisce di L/c^2 . Poiché, ovviamente, non è qui essenziale che l'energia sottratta ad un corpo si trasformi in energia di radiazione piuttosto che in qualche altra forma di energia, siamo condotti a questa conclusione più generale: *la massa di un corpo è una misura del suo contenuto di energia*; se l'energia varia di una quantità *L*, la massa varia nello stesso senso di $L/c^2...$ Se la teoria è in accordo con i fatti, allora la radiazione trasmette inerzia tra corpi emittenti e assorbenti [187, p. 174; corsivi miei].

Inoltre, in una lettera inviata nell'estate del 1905 all'amico e matematico Conrad Habicht, Einstein scriveva:

Una conseguenza dello studio della elettrodinamica mi è venuta in mente. Cioè, il principio di relatività, associato alle equazioni fondamentali di Maxwell, richiede che la massa sia una misura diretta dell'energia contenuta in un corpo; la luce trasporta massa con sé. Una notevole riduzione della massa dovrebbe aversi nel caso del radio. L'idea è divertente e seducente; ma, per quanto ne so, Dio onnipotente potrebbe ridere di tutta la faccenda e potrebbe avermi menato per il naso [188, p. 21]. Quindi, Einstein afferma che:

- 1. «Se un corpo emette un'energia *L* sotto forma di radiazione, la sua massa diminuisce di L/c^2 ». In realtà, come abbiamo visto nel caso dell'emissione di un fotone da parte di un atomo in quiete prima dell'emissione (sezione IV.7.2), il difetto di massa è dato da: $\Delta m = (E_{ph}^0 + E_R)/c^2$, dove E_R è l'energia di rinculo dell'atomo. E_R compare solo se si tiene conto del fatto che, nel processo di emissione, deve essere conservata anche la quantità di moto. Ma, nel 1905, Einstein non aveva ancora associato una quantità di moto ai quanti di luce. Peraltro, nella sezione IV.6, abbiamo visto come, ancora nel 1921, Einstein non tenesse conto della conservazione della quantità di moto nel processo di emissione di un fotone da parte di un atomo.
- 2. «La radiazione trasmette inerzia tra corpi emittenti e assorbenti». Questa asserzione è imprecisa perché, nella dinamica relativistica, la massa non è una misura dell'inerzia.
- 3. «La massa di un corpo è una misura del suo contenuto di energia». Per la precisione, si dovrebbe aggiungere, 'quando il corpo è in quiete'.
- 4. «La luce trasporta massa con sé» (nella lettera a Habitch). Questa asserzione deve essere chiarita come mostrato a pagina 201, descrivendo il fenomeno di risonanza (emissione assorbimento) tra due atomi.

Queste considerazioni mostrano come il ruolo dei concetti di massa, inerzia ed energia debba essere descritto con accuratezza di linguaggio al fine di evitare gravi fraintendimenti concettuali. Il caso seguente costituisce un ulteriore esempio in cui è facile incorrere in confusioni concettuali. L'attribuzione di una massa ai fotoni (intesa come una misura della loro energia), potrebbe essere suggerita dal seguente esperimento mentale. Due fotoni di eguale energia E_{ph}^0 sono emessi contemporaneamente in direzioni opposte da un corpo di massa *m* posto nell'origine del SRI O (figura V.2).

Prima dell'emissione, la massa del sistema è m e la sua energia è mc^2 ; la quantità di moto è nulla. Dopo l'emissione, l'energia del sistema costituito dal corpo e dai due fotoni è ancora mc^2 e la sua quantità di moto è nulla perché il corpo emettente non rincula e la somma delle quantità di moto dei due fotoni è nulla. La massa del sistema costituito dal corpo emettente e dai due fotoni è uguale a m, cioè anche la massa sembrerebbe conservata durante il processo di emissione. Pertanto, siccome durante l'emissione dei



Figura V.2. Due fotoni di eguale energia sono emessi contemporaneamente lungo due direzioni opposte dal corpo di massa *m* posto (in quiete) nell'origine del SRI O. Si noti come l'apice 0 che compare nel simbolo rappresentante l'energia dei fotoni ci rammenti che E_{ph}^{0} è un invariante relativistico.

due fotoni, la massa del corpo emettente diminuisce di $2E_{ph}^0/c^2$, ognuno dei due fotoni assumerebbe una massa pari a E_{ph}^0/c^2 . Questa conclusione è errata perché basata su un uso improprio del concetto di massa. La massa è una proprietà, per esempio, di un atomo, che compare nella definizione del quadrivettore quantità di moto (B.9), quadrivettore che obbedisce poi all'e-quazione di moto della dinamica relativistica (B.10). I fotoni non obbedisco-no a questa equazione e, quindi, ad essi *non possiamo associare una massa*. Ne segue che, nel ragionamento precedente, l'errore consiste nell'associare una massa al sistema costituito dal corpo emettente e dai due fotoni: nel processo considerato, la massa appartiene solo al corpo emettente e, nell'e-missione, è conservata solo l'energia: infatti il corpo emettente perde una massa pari a $2E_{ph}^0/c^2$.

A conclusione di queste riflessioni, è opportuno precisare il significato del termine 'massa' usato in vari contesti, in modo tale che il quadro complessivo sia coerente:

- Nella dinamica newtoniana, la massa *m* assume il ruolo di massa inerziale, perché *m* è la costante di proporzionalità tra la forza applicata al corpo e la sua accelerazione: $\vec{f} = m\vec{a}$.
- Nella dinamica relativistica, la massa *m* è invece l'invariante che lega il quadrivettore impulso della particella alla sua quadrivelocità: $\vec{\mathscr{P}} = m\vec{\mathscr{V}}$.
- Nella dinamica relativistica, l'inerzia di una particella dipende dalla sua massa e dalla variazione temporale della componente tridimensionale $\gamma \vec{v}$ del quadrivettore velocità.
- Nella dinamica relativistica la massa è una misura dell'energia di un corpo in quiete: $E_0 = mc^2$.
- La massa è una proprietà di una entità teorica che obbedisce all'equazione della dinamica relativistica: essa quindi non può essere asso-

ciata ai fotoni. Tuttavia, se nell'espressione del modulo quadrato del quadrivettore energia - impulso si pone m = 0 si ottiene che la quantità di moto p è uguale a E/c, relazione tipica dei fotoni. Per questa ragione, è giustificata – *a posteriori* – l'affermazione secondo cui un fotone può essere considerato come una 'particella relativistica' con massa nulla.

V.6 Che cosa è l'energia?

All'interno del quadro concettuale esposto nel capitolo I, l'energia è una grandezza fisica che descrive una proprietà di una entità teorica. Nella sezione precedente abbiamo individuato diverse entità teoriche cui è associata la grandezza fisica 'energia': particelle, corpi macroscopici, fotoni, campi. A pagina 11, abbiamo individuato le condizioni che debbono essere soddisfatte affinché una grandezza fisica abbia significato fisico. Per comodità del lettore, le riportiamo qui di seguito. Una grandezza fisica ha significato fisico se essa soddisfa le seguenti condizioni:

- La sua eliminazione riduce la capacità predittiva di una teoria (criterio forte).
- La sua eliminazione riduce la capacità descrittiva di una teoria (criterio debole).
- Essa può essere misurata, almeno in linea di principio.

Tutte le accezioni del concetto di energia discusse nelle sezioni precedenti, soddisfano queste condizioni. In particolare, soddisfa queste condizioni il concetto di energia potenziale. Questo concetto, se eliminato, riduce la capacità predittiva delle teorie che lo usano; inoltre, l'energia potenziale associata ad una particella posta in un campo che si annulla all'infinito può essere misurata partendo dalle formule che la esprimono.

In un recente articolo, Eugene Hecht ha sostenuto una concezione diversa [189]. Secondo Hecht, alla luce della conoscenza acquisita, esistono (nel Mondo) solo due forme di energia: l'energia associata alla massa (mc^2) e l'energia cinetica. Solo in quanto esistenti, queste due forme di energia sono misurabili. L'energia potenziale è solo un utile strumento matematico che non ha corrispondenza nel Mondo, cioè *non esiste*. Pertanto, in quanto, non esistente, essa non è misurabile:

Due idee sono centrali per la discussione: la conservazione dell'energia e la relazione tra l'energia a riposo E_0 e la massa, cioè $E_0 = mc^2$. Sebbene l'energia potenziale descriva un aspetto significativo dello stato di un sistema ed è pertanto indispensabile teoricamente, non è più richiesto che essa sia una realtà fisica al fine specifico di assicurare la conservazione dell'energia, e questo è il punto cruciale. Se l'energia potenziale non esiste fisicamente, il suo ruolo nella conservazione dell'energia deve essere svolto da qualche altra forma di energia che esiste, una [forma] che sia misurabile. Questo può essere realizzato perché ogni qualvolta l'energia potenziale cambia, c'e sempre una variazione reale della massa del sistema misurabile (in linea di principio) che assicura la conservazione dell'energia [189, p. 2].

La concezione di Hecht è in contrasto con i presupposti filosofici ed epistemologici esposti nel capitolo I. Hecht parte da asserzioni ontologiche (di esistenza nel Mondo) assiomatiche per dedurre la misurabilità di una grandezza fisica. In questo modo, Hecht trascura il fatto che nella prassi quotidiana i fisici misurano grandezze fisiche partendo dalle formule che le esprimono quantitativamente e che queste misure sono significative sia quando le entità teoriche di cui le grandezze fisiche esprimono proprietà sono plausibilmente esistenti nel Mondo sia quando non lo sono. Abbiamo infatti visto come Maxwell abbia misurato la rigidità dell'Etere (pagina 11), oppure come si possano misurare grandezze fisiche associate alle onde elettromagnetiche anche se la loro esistenza non è plausibile (pagina 171 e 174) o le proprietà delle buche nei semiconduttori, non ostante che le buche non esistano (pagina 10).

Tuttavia, il punto centrale della concezione di Hecht è l'asserzione che ad ogni variazione di energia potenziale corrisponde, sempre, una variazione di massa. A pagina 195, con particolare riferimento all'equazione (V.23), abbiamo visto che l'energia potenziale media dell'atomo di idrogeno nello stato fondamentale è proporzionale al difetto di massa dell'atomo causato dall'emissione di energia elettromagnetica durante la sua formazione.

L'asserzione di Hecht è corretta anche nel caso del red - shift gravitazionale, discusso nella sezione II.4 e nell'appendice B.5. Infine, Hecht discute l'esempio di una molla sotto tensione o compressione, asserendo che l'energia potenziale associata alla molla in tensione o in compressione implica un aumento della massa della molla. Questo caso è, concettualmente simile a quello del red - shift gravitazionale: l'asserzione di Hecht è quindi plausibile. Manca, purtroppo, una possibile verifica sperimentale.

A livello divulgativo, è possibile rispondere alla domanda 'che cosa è l'energia' ripercorrendo il percorso che abbiamo seguito, adeguando le specificazioni al contesto della divulgazione. Considerato un corpo, se è in quiete, esso possiede una energia a riposo E_0 pari mc^2 dove m è la massa (invariante) del corpo. L'energia a riposo è un concetto della relatività speciale; anzi a detta del suo fondatore, è il risultato più importante della teoria. Questa energia può essere definita 'latente', perché può essere trasformata parzialmente o totalmente in energia cinetica. L'energia cinetica, a sua volta, è quella parte dell'energia che un corpo acquisisce quando è in moto: la formula che la rappresenta è, nella dinamica newtoniana $T = (1/2)mv^2$. Mentre l'energia a riposo ha lo stesso valore in ogni sistema di riferimento inerziale, l'energia cinetica varia passando da un riferimento all'altro. Infine, se un corpo interagisce con un altro, per esempio attraverso l'interazione gravitazionale, al sistema costituito dai due corpi è associata una energia potenziale dipendente dalla distanza tra i baricentri dei due corpi. Anche l'energia potenziale può essere denotata come energia latente, perchè può essere trasformata in energia cinetica. Come esempio particolare si può citare il caso di un corpo sollevato ad una determinata altezza rispetto al suolo e poi lasciato cadere. L'energia potenziale può essere usata nella relatività speciale con precauzione, perché in questa teoria, le interazioni fisiche si propagano con velocità finita (diversamente da quanto prevede la dinamica newtoniana). Di conseguenza, il valore dell'energia potenziale di due corpi interagenti ad un certo istante dipende dalla distanza tra i due corpi ad un istante precedente, distanza dipendente dalla velocità di propagazione dell'interazione. Nelle teoria einsteiniana della gravitazione (relatività generale) il concetto di energia potenziale è usato solo nelle approssimazioni di campi gravitazionali deboli e di velocità dei corpi piccole rispetto a quelle della luce. In fisica si assume il principio di conservazione dell'energia: la somma delle energie associate ad un sistema fisico (energia a riposo + energia cinetica + energia potenziale + energia di radiazione) è costante. Questo principio ha svolto e svolge un ruolo eurístico e predittivo fondamentale e non è mai stato falsificato da alcun esperimento.

V.7 Simmetrie e leggi di conservazione

Nei manuali di fisica è assai diffusa la concezione secondo cui le leggi di conservazione di grandezze fisiche quali la quantità di moto, l'energia e il momento angolare di un sistema isolato sono la conseguenza della omogeneità dello spazio, della omogeneità del tempo e della isotropia dello spazio, rispettivamente ¹⁷. Per dimostrare questa connessione, il sistema fisico è descritto mediante la funzione di Lagrange (non relativistica). Se il tem-

¹⁷Si veda, come esempio tipico, la trattazione di Landau e Lifshitz [190, p. 13].

po è omogeneo, la funzione di Lagrange di un sistema isolato non dipende esplicitamente dal tempo: la conservazione dell'energia è una diretta conseguenza di questa indipendenza. Ne consegue che l'energia è conservata anche se il sistema è immerso in un campo costante, cioè non dipendente dal tempo.

L'omogeneità dello spazio implica che le proprietà di un sistema isolato non cambiano in seguito ad uno spostamento parallelo dell'intero sistema ¹⁸. Considerando uno spostamento parallelo infinitesimo, si impone che la funzione di Lagrange rimanga invariata: ne discende la conservazione della quantità di moto del sistema. Allo stesso modo, imponendo che la funzione di Lagrange rimanga invariata in seguito ad una rotazione infinitesima dell'intero sistema, si deduce la conservazione del momento angolare.

La connessione tra simmetrie e leggi di conservazione fu generalizzata nel 1918 da Emmy Noether mediante il cosiddetto 'primo teorema di Noether' [191]. Sinteticamente, esso afferma che ad ogni simmetria corrisponde una grandezza fisica conservata. Vale anche il teorema inverso. Il 'secondo teorema' riguarda invece la conservazione dell'energia nella teoria della relatività generale, problema cui Emmy Noether fu interessata da David Hilbert e Felix Klein. Nella prefazione del libro *The Noether Theorems*, l'autrice, Yvette Kosmann - Schwarzbach, scrive:

Questi teoremi, la cui importanza rimase oscura per decenni, esercitarono infine una considerevole influenza sullo sviluppo della moderna fisica teorica e la loro storia è connessa a numerosi argomenti di fisica, meccanica e matematica [192, p. VII].

Tuttavia, per discutere le relazioni tra simmetrie spazio - temporali e leggi di conservazione è sufficiente considerare le trattazioni 'classiche' di questo problema, discusse, per esempio, nel già citato volume di Landau e Lifshitz. Una riflessione particolare richiede la conservazione dell'energia. La conservazione dell'energia è un *principio* (postulato) fondativo della fisica a partire dalla seconda metà dell'Ottocento. Pertanto, il teorema che connette l'omogeneità del tempo alla conservazione dell'energia è soltanto un caso particolare di corroborazione teorica del principio. Il principio di conservazione dell'energia ha svolto un ruolo predittivo fondamentale nei più svariati contesti fisici, inclusi quelli atomici, sub - atomici e cosmologici,

¹⁸Si ha uno spostamento parallelo del sistema quando ogni suo punto è sottoposto al medesimo spostamento: $\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}_a + \vec{\epsilon}$.

Capitolo V - Sull'energia

anche in assenza di teorie specifiche. Sinora, il principio di conservazione dell'energia non è mai stato falsificato dall'esperienza ¹⁹.

¹⁹Si è anche discusso sulla priorità concettuale tra simmetrie spazio - temporali e leggi di conservazione. Si veda, per esempio, [193, 194] e la bibliografia ivi contenuta.

Capitolo VI

Meccanica quantica, fisica e filosofia

La meccanica quantica non ha bisogno di alcuna 'interpretazione' [195].

Cristopher Fuchs e Asher Peres

La nascita della meccanica quantica, rappresenta, dal punto di vista del rapporto tra Fisica e Filosofia, un caso unico: per la sterminata letteratura cui ha dato origine; per la varietà di approcci; per un improprio intreccio tra Fisica e Filosofia. Il dibattito filosofico che ha caratterizzato la nascita della meccanica quantica è emblematicamente rappresentato dal confronto tra Einstein e i 'padri fondatori' della nuova meccanica. Questo confronto è stato più volte ripercorso nei decenni successivi: i temi dibattuti andavano dallo stato epistemologico della meccanica quantica, alla sua (in)completezza, ai problemi della causalità. Dopo il lavoro di John Bell del 1964 [196], il dibattito si è concentrato sul cosiddetto paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen [197] e sugli esperimenti che, a partire dagli anni Sessanta del secolo scorso, sono stati eseguiti in connessione a queste problematiche.

Affronteremo la discussione sulla base di quanto abbiamo acquisito sinora. In particolare:

1. Le teorie fisiche debbono predire i valori delle grandezze fisiche da esse usate.

- 2. Le teorie sono interpretate indicando le grandezze fisiche da sottoporre a misura e individuando le connessioni causali operanti nei fenomeni descritti. La plausibilità (o verosimiglianza) di queste connessioni causali nel Mondo deriva anche dal funzionamento dei dispositivi costruiti sulla base delle teorie in discussione.
- 3. Una teoria non descrive 'come le cose accadono nel Mondo'. Il co-siddetto 'realismo delle teorie' presuppone infatti due condizioni irrealizzabili: a) che tutte le entità teoriche usate dalla teoria siano *con certezza* oggetti, cioè esistano nel Mondo; b) che esista la possibilità di verificare, indipendentemente dalla teoria stessa, che le cose accadono nel Mondo esattamente come previsto dalla teoria. Entrambe le condizioni non sussistono. La prima perché l'esistenza nel Mondo di una entità teorica è solo plausibile o verosimile; la seconda perché se fosse possibile conoscere come le cose vanno nel Mondo indipendentemente dalla teoria prescindendo dalle sue predizioni quantitative diverrebbe del tutto inutile.
- 4. Affermazioni di esistenza nel Mondo di entità teoriche possono essere fatte solo a posteriori, debbono essere compatibili con la conoscenza acquisita e sono solo plausibili (o verosimili se hanno lunga durata).
- 5. Devono essere eliminati concetti che non sono usati per effettuare predizioni, ma solo per descrivere a posteriori i risultati delle misure.

VI.1 La regola di sovrapposizione

A pagina 63 abbiamo chiamato 'regola di sovrapposizione' il corollario delle equazioni di Maxwell secondo cui i campi elettrico e magnetico prodotti dalle sorgenti S_1 e S_2 sono dati dalla somma vettoriale dei campi prodotti separatamente da S_1 e S_2 . La regola di sovrapposizione può essere estesa anche ad altre situazioni, avendo tuttavia ben presente la necessità di distinguere regole puramente matematiche dalle situazioni fisiche. Il caso della luce polarizzata si presta bene ad una discussione di questo tipo.

VI.2 Luce polarizzata

Un'onda elettromagnetica è polarizzata linearmente se la direzione lungo la quale oscilla il campo elettrico (o magnetico) è costante nel tempo. Quando invece il vettore campo elettrico - di ampiezza costante - ruota, l'onda è polarizzata circolarmente. Si dice polarizzata circolarmente in senso destrorso se, osservando l'onda propagarsi in avanti, il vettore campo elettrico ruota in senso orario; è invece polarizzata in senso sinistrorso se il campo elettrico ruota in senso antiorario (figura VI.1)¹.



Figura VI.1. Definizione di polarizzazione circolare. La direzione di propagazione dell'onda è perpendicolare al piano della figura ed entrante. Le frecce indicano il senso di rotazione del campo elettrico.

Dal punto di vista operativo, un'onda si dice polarizzata linearmente se, dopo aver attraversato un polarizzatore lineare ideale, la sua intensità presenta due massimi e due minimi nulli in seguito ad una rotazione di 2π del polarizzatore (appendice D.3). Un polarizzatore lineare ideale è tale se esso è completamente trasparente alle onde elettromagnetiche il cui campo elettrico oscilla lungo la direzione del suo asse ottico e completamente opaco alle onde il cui campo elettrico è perpendicolare all'asse ottico.



Figura VI.2. $\vec{E} = \hat{r}E_0 \cos \omega t$ è il campo elettrico di un'onda piana polarizzata linearmente lungo la direzione del versore \hat{r} in un punto qualunque della superficie di un polarizzatore lineare ideale. L'asse ottico del polarizzatore è diretto lungo l'asse *x*.

Consideriamo un'onda piana polarizzata linearmente lungo la direzione che forma un angolo θ con l'asse x (figura VI.2). Ci chiediamo quale sarà l'intensità dell'onda dopo che essa ha attraversato un polarizzatore lineare il cui asse ottico è orientato lungo la direzione x. Per rispondere alla domanda, consideriamo il campo elettrico \vec{E} dell'onda come somma di due vettori, uno parallelo all'asse x, l'altro ad esso perpendicolare. Ciò equivale a supporre di avere a che fare con la sovrapposizione di due onde, una polarizza-

¹Purtroppo, non c'è consenso in letteratura su questa definizione. La definizione alternativa, che scambia la polarizzazione destrorsa in sinistrorsa (e viceversa) è la seguente. Si consideri un'onda che avanza verso l'osservatore: se il campo elettrico ruota in senso orario, la polarizzazione è destrorsa; se ruota in senso antiorario, la polarizzazione è sinistrorsa.

ta linearmente lungo l'asse *x*, l'altra polarizzata linearmente lungo l'asse *y*. Pertanto, in un punto qualunque della superficie del polarizzatore:

$$\vec{E} = \hat{r}E_0\cos\omega t = \hat{i}E_0\cos\theta\cos\omega t + \hat{j}E_0\sin\theta\cos\omega t \qquad (VI.1)$$

Siccome l'asse ottico del polarizzatore è diretto lungo l'asse *x*, solo l'onda polarizzata lungo l'asse *x* attraverserà il polarizzatore, mentre l'altra sarà completamente assorbita. L'intensità di ogni onda è proporzionale al quadrato del valore massimo del suo campo elettrico: $I_0 = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} (E_0^2/2)$. Ne segue che, se I_0 è l'intensità dell'onda prima del polarizzatore, la sua intensità dopo il polarizzatore sarà data da $I_0 \cos^2 \theta$: questa è la legge di Malus.

Siccome la scomposizione del campo elettrico dell'onda incidente può essere fatta lungo una qualsiasi coppia di due direzioni tra di loro perpendicolari, la scomposizione scelta è puramente strumentale ai fini della predizione e non ha nulla a che fare con che cosa si sta svolgendo nel Mondo, dove, peraltro, non sappiamo se le onde elettromagnetiche esistano.

Dal punto di vista matematico, un campo elettrico oscillante lungo una direzione definita può essere scritto anche come somma di due campi elettrici rotanti in senso opposto. Cosa succede se applichiamo questa scomposizione ad un'onda polarizzata linearmente? Troviamo che mentre l'intensità di un'onda polarizzata linearmente viene modificata da un polarizzatore lineare di un fattore $\cos^2 \theta$ l'intensità di ognuna delle due onde polarizzate circolarmente viene ridotta di un fattore 1/2 indipendentemente dall'orientazione del polarizzatore lineare. Pertanto, l'intensità della somma di due onde polarizzatore lineare. Dobbiamo pertanto concludere che un'onda polarizzata linearmente non può essere descritta come la somma di due onde polarizzate circolarmente in senso opposto.

Consideriamo un'onda polarizzata circolarmente. Siccome l'angolo che il campo elettrico dell'onda forma con l'asse del polarizzatore varia nel tempo, dobbiamo applicare la legge di Malus istante per istante e calcolare il valor medio su un intero periodo. Se indichiamo con I_0^C l'intensità di questa onda prima del polarizzatore, l'intensità di essa dopo il polarizzatore sarà:

$$I = \frac{I_0^C}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos^2(\theta+\alpha) d\alpha =$$

=
$$\frac{I_0^C}{4\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} [1+\cos 2(\theta+\alpha)] d\alpha = \frac{I_0^C}{2}$$
(VI.2)

VI.3 Lo stato di sovrapposizione nella meccanica quantica

Consideriamo un sistema fisico per cui siano possibili solo due stati descritti, rispettivamente, dagli autostati $|\psi_1 > e|\psi_2 > e$ che la grandezza fisica *A* assuma il valore a_1 quando il sistema è descritto da $|\psi_1 > e$ il valore a_2 quando il sistema è descritto da $|\psi_2 >$. Il sistema fisico considerato può quindi essere descritto dallo stato $|\psi >$:

$$|\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle$$
 (VI.3)

La (VI.3) è, per postulato (postulato S_1), interpretata affermando che la probabilità di avere come esito di una misura il valore a_1 è data da $c_1c_1^*$ e quella di avere il valore a_2 da $c_2c_2^*$. Deve essere: $c_1c_1^* + c_2c_2^* = 1$.

Tuttavia, è diffusa un'interpretazione alternativa secondo cui, quando il sistema fisico è descritto dallo stato di sovrapposizione (VI.3), la grandezza fisica *A* non possiede alcuno dei due valori: solo all'istante della misura la grandezza fisica assume il valore a_1 o il valore a_2 , con probabilità $c_1c_1^*$ o $c_2c_2^*$, rispettivamente. Questa interpretazione, trasferita in una immagine del Mondo, implica che il sistema esiste nel Mondo in uno stato in cui la grandezza fisica *A* non ha un valore definito: essa non ha né il valore a_1 , né il valore a_2 . Chiameremo il postulato che sta alla base di questa interpretazione, postulato GFND (Grandezza Fisica Non Definita). Si osservi come i due postulati interpretativi concordino su quale possa essere l'esito di una misura della grandezza fisica considerata. Ma, mentre il postulato S_1 non introduce alcuna ipotesi ulteriore, il postulato GFND fa affermazioni circa il valore della grandezza fisica *prima* della misura. Nel seguito mostreremo che:

- (A) Lo stato di sovrapposizione è utilizzato per descrivere stati di un sistema fisico in cui la grandezza fisica in gioco possiede un valore definito. In questi casi, evidentemente, il postulato *GFND* è falsificato.
- (B) Nella interpretazione di esperimenti EPR, connessi al dilemma posto da Einstein, Podolsky e Rosen nel 1935 [197], il postulato GFND può essere sottoposto a verifica sperimentale (sezione VI.5.9).

Non è quindi sorprendente che il postulato GFND conduca a paradossi come quello del 'gatto di Schrödinger', che altro non è se non un caso particolare della 'riduzione della funzione d'onda', intesa come processo fisico reale (che accade nel Mondo).



Figura VI.3. Fotoni polarizzati linearmente lungo la direzione *x* incidono su un polarizzatore lineare con l'asse ottico orientato lungo la direzione x'. Nella figura sono mostrati gli stati di un fotone e la direzione del campo elettrico della luce per illustrare la medesima struttura matematica delle due descrizioni. Si veda il testo.

Come esempio per (A), consideriamo il caso della luce polarizzata linearmente, già trattato nella sezione VI.2 all'interno dell'elettromagnetismo maxwelliano. La descrizione classica in termini di intensità può essere direttamente tradotta in una descrizione quantica con la sostituzione intensità \rightarrow probabilità. Effettivamente, la fisica quantica prevede che, se un fotone polarizzato linearmente lungo la direzione *x* (cioè che ha attraversato un polarizzatore lineare ideale il cui asse ottico è orientato lungo la direzione *x*) incide su un secondo polarizzatore lineare il cui asse ottico forma un angolo θ con la direzione di polarizzatore del fotone incidente, la probabilità che il fotone attraversi il secondo polarizzatore è data da cos² θ (figura VI.3). Vediamo come si giunge a questo risultato. Il fotone incidente sul secondo polarizzatore è descritto come una sovrapposizione di polarizzazioni lineari lungo due direzioni perpendicolari *x'*, *y'*, dove la direzione *x'* coincide con l'asse del secondo polarizzatore:

$$|x\rangle = |x'\rangle \cos\theta + |y'\rangle \sin\theta \qquad (VI.4)$$

È evidente, anche dalla figura VI.3, come questa descrizione abbia la stessa struttura matematica della descrizione elettromagnetica: $\vec{E} = \vec{E}'_x + \vec{E}'_y$. Dalla (VI.4) segue immediatamente che la probabilità che il fotone attraversi il secondo polarizzatore è uguale a $\cos^2 \theta$. La fisica sottostante a questo esperimento è la stessa per le due descrizioni, classica e quantica:

- 1. La luce (fotone) uscente dal primo polarizzatore è polarizzata linearmente lungo la direzione *x*.
- 2. Dopo il secondo polarizzatore, la luce (fotone) è polarizzata linearmente lungo la direzione x': il polarizzatore ha cambiato lo stato di polarizzazione della luce.

3. La frazione di luce (probabilità per il fotone) che attraversa il secondo polarizzatore è uguale a $\cos^2 \theta$.

Questo esempio mostra come la fisica quantica, pur in presenza di un valore definito della polarizzazione prima della misura effettuata dal secondo polarizzatore, descriva il fotone come sovrapposizione di due polarizzazioni lineari. In altri termini: la descrizione di un sistema fisico mediante uno stato di sovrapposizione non implica che le grandezze fisiche del sistema non abbiano un valore definito prima della misura.

VI.3.1 Il gatto di Schrödinger

Alla luce di queste riflessioni, dovrebbe essere chiaro quale sia l'origine del cosiddetto paradosso del gatto di Schrödinger. Il paradosso è dovuto all'interpretazione realista dello stato di sovrapposizione (VI.3). Secondo questa interpretazione lo stato di sovrapposizione è inteso come realmente esistente nel Mondo. Finché la misura non è effettuata, il gatto non è né vivo né morto; solo la misura fa precipitare lo stato del gatto nella condizione di vita o di morte. Schrödinger aveva ideato questo esperimento mentale per porre in evidenza le conseguenze paradossali di certe interpretazioni della meccanica quantica². Scrive Schrödinger:

Si possono persino immaginare casi piuttosto burleschi³. Un gatto è racchiuso in una camera d'acciaio, insieme al seguente dispositivo infernale (che deve essere protetto da una manipolazione da parte del gatto): in un contatore Geiger c'è una minuscola porzione di una sostanza radioattiva, così minuscola, che *forse* in un'ora uno degli atomi si disintegra, ma anche, con uguale probabilità, forse nessuno; se succede, nel tubo del contatore si innesca una scarica elettrica che, attraverso un relè, aziona un martello che frantuma una fiala contenente acido cianidrico. Se si lascia questo intero sistema a sé stesso per un'ora, si direbbe che il gatto vive ancora se nel frattempo nessun atomo si è disintegrato. La prima disintegrazione atomica l'avrebbe invece avvelenato. La funzione Ψ dell'intero sistema esprimerebbe

²L'esperimento mentale con il gatto fu ideato in seguito ad uno scambio di lettere tra Einstein e Schrödinger dopo la pubblicazione del lavoro di Enstein, Podolsky e Rosen sulla (in)completezza della meccanica quantica [197]. In precedenza, Einstein aveva preso in considerazione il caso di un fusto di esplosivo instabile: anche in questo caso, caratterizzato dalla presenza di un corpo macroscopico, lo stato dell'esplosivo era dato da una sovrapposizione di 'esploso' e 'non esploso'.

³L'aggettivo usato da Schrödinger è 'burleske'. Come è noto, erano denotati con il sostantivo 'burlesque' spettacoli satirici diffusi in Gran Bretagna nel Settecento. Nell'Ottocento, questi spettacoli hanno accentuato il loro carattere parodistico e farsesco.

ciò includendo in sè stessa il gatto vivo e quello morto (scusate l'espressione) mescolato o spalmato in parti uguali [198, p. 328; corsivo originale].

Innanzitutto, è necessario osservare come la misura sia intesa, in questo caso, in modo improprio. Infatti, una misura è usualmente e correttamente intesa come una procedura per misurare il valore di una grandezza fisica ad un certo istante oppure a misurare un suo valore medio; oppure per stabilire quando (in quale istante) un evento possibile si verifica o si è verificato. Nel caso del gatto, si tratterebbe di valutare se, ad un certo istante, il gatto è vivo o morto o, meglio, se un atomo della sostanza radioattiva si è disintegrato. A tale scopo, nessun fisico allestirebbe un apparato di misura che, come quello ipotizzato da Schrödinger, non permette di valutare quando un atomo si disintegra o si è disintegrato, ma solo di verificare se ciò è accaduto dopo un intervallo di tempo arbitrario il cui istante finale corrisponde all'apertura della scatola. L'identificazione della misura con l'apertura della scatola introduce un elemento spurio, sul quale peraltro, sono state sviluppate elucubrazioni prive di significato fisico. Il gatto di Schrödinger deve, a mio parere, essere inteso come un apologo epistemologico. L'apologo mira a mostrare cosa succede quando si suppone che una teoria descriva esattamente come le cose si svolgono nel Mondo (realismo delle teorie). L'inserimento di un essere macroscopico e vivente nell'esperimento 'infernale' è, da un punto di vista retorico, un colpo da maestro. Così prosegue Schrödinger:

È tipico di questi casi trasformare una indeterminatezza riguardante originariamente il dominio atomico in una indeterminatezza macroscopica, che può essere risolta mediante una osservazione diretta. Ciò ci evita di accettare ingenuamente che un 'modello sfocato' possa rappresentare la realtà. Di per sé stesso, il modello non contiene alcunché che sia oscuro o contraddittorio. Ma c'è una differenza tra una fotografia mossa o sfocata e quella di un gruppo di nuvole o di banchi di nebbia [198, p. 328].

A mio giudizio, questo passaggio rafforza l'idea che il racconto del gatto deve essere inteso come un apologo epistemologico. Diversamente, in letteratura, prendendo anche spunto dal problema della misura in meccanica quantica, il gatto di Schrödinger è divenuto un altro campo di contrapposizione di diverse interpretazioni della meccanica quantica.

C'è un esperimento mentale simile a quello del gatto, ma senza aspetti 'burleschi' (e con una appropriata concezione della misura), che mostra come non sia possibile una interpretazione realista dello stato di sovrapposizione. Si consideri un atomo in uno stato eccitato posto al centro di un rivelatore di fotoni costituito da una superfice sferica; si suppone il rivelatore abbia una efficienza quantica uguale ad uno. L'atomo può essere descritto come una sovrapposizione di 'atomo eccitato' e 'atomo nello stato fondamentale', non necessariamente con le stesse probabilità, quindi con una funzione di stato simile alla (VI.3):

$$|\psi\rangle = c_1 |\psi(\text{eccitato})\rangle + c_2 |\psi(\text{stato fondamentale})\rangle$$
 (VI.5)

Finché il rivelatore non rivela un fotone, l'atomo *è* nello stato eccitato. Questa conclusione deriva dal fatto che il rivelatore ha compiuto una misura, anche se l'esito di questa misura è stato negativo, perché il rivelatore non ha rivelato alcun fotone. Ciò non ostante, l'atomo continua ad essere *descritto* dallo stato di sovrapposizione (VI.5). In questo caso, la misura non produce, *nella descrizione*, alcuna 'riduzione della funzione di stato'. Queste considerazioni mostrano che descrivere l'atomo mediante uno stato di sovrapposizione è solo un procedimento teso a valutare la probabilità di trovare l'atomo in uno dei due stati possibili. Infatti, non è possibile sostenere che, finché l'atomo non emette un fotone, esso *si trova* in uno stato di sovrapposizione, inteso come esistente nel Mondo: finché l'atomo non emette un fotone, esso *è* nello stato eccitato.

È quindi evidente come l'apologo epistemologico di Schrödinger sia stato formulato in modo improprio. Uno sperimentatore eviterebbe di nascondere l'apparato 'infernale' in una scatola o, se proprio volesse nascondere alla vista la possibile morte del gatto, potrebbe porre all'esterno della scatola uno strumento che indica l'avvenuta disintegrazione dell'atomo e la conseguente morte istantanea del gatto: sinché tale strumento non indica l'avvenuta disintegrazione, il gatto, pur essendo descritto da uno stato di sovrapposizione, è vivo. Il fatto che questo apologo epistemologico sia ancora e costantemente riproposto nei modi più fantasiosi è un indice della confusione che può essere prodotta da assunzioni che *postulano* la esistenza certa nel Mondo di entità teoriche usate dalle teorie: in questo caso, dello stato di sovrapposizione.

VI.4 Il principio di indeterminazione di Heisenberg

Un recente articolo di Hilgevoord e Uffink riassume gli aspetti concettuali ed epistemologici connessi al principio di indeterminazione [199]. C'è, innanzitutto un problema, apparentemente, di denominazione: si parla di principio di indeterminazione, di relazioni di inaccuratezza, relazioni di incertezza, relazioni di indeterminazione. L'uso preferenziale di una di queste denominazioni è associato, in generale, ad una particolare interpretazione del formalismo quantico e/o ad una particolare posizione epistemologica o filosofica. È inoltre evidente che, a rigore, non si può parlare di 'principio' in riferimento a equazioni che sono una conseguenza diretta di un formalismo, tra i cui postulati non compare questo 'principio'. Per ragioni che saranno chiare alla fine di questa sezione, ritengo che la denominazione di *disuguaglianze HKR* (Heisenberg - Kennard - Robertson) sia quella più adatta.

Heisenberg era arrivato alla formulazione delle sue disuguaglianze nel contesto di una vivace discussione con Schrödinger su quanto fossero Anschaulich (intuitive e visualizzabili) le due formulazioni della meccanica quantica: quella matriciale di Heisenberg (1925) e quella ondulatoria di Schrödinger (1926). La contrapposizione era radicale e il conflitto epistemologico insanabile, anche perché non c'era consenso su cosa fosse la Anschaulichkeit⁴. Mentre per Schrödinger la Anschaulichkeit della teoria era assicurata dalla evoluzione spazio - temporale della funzione d'onda, Heisenberg affermava che la Anschaulichkeit è presente quando «crediamo di comprendere intuitivamente una teoria fisica», cioè quando «riusciamo a pensare in modo qualitativo alle conseguenze sperimentali di tale teoria in tutti i casi semplici e quando allo stesso tempo abbiamo riconosciuto che l'applicazione della teoria non contiene mai contraddizioni interne [200, trad. it. p. 45].» Heisenberg procede quindi ad illustrare il contenuto anschaulich della relazione di non commutazione tra gli operatori di posizione e di quantità di moto

$$\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} = -i\frac{h}{2\pi} \tag{VI.6}$$

considerando un esperimento mentale in cui la posizione di un elettrone è misurata mediante un microscopio che utilizza luce (fotoni) γ (figura VI.4). Consideriamo i due angoli estremi di diffusione, indicati nella figura VI.4 con la lunghezza d'onda $\lambda' \in \lambda''$ associata ai due fotoni diffusi. Dopo la diffusione lungo la direzione di λ' o la diffusione lungo la direzione di λ'' la quantità di moto lungo la direzione *x* del sistema elettrone + fotone deve essere uguale a quella prima della diffusione. Quindi, deve anche essere:

$$p'_{x} + \frac{h}{\lambda'}\sin\varepsilon = p''_{x} - \frac{h}{\lambda''}\sin\varepsilon$$
(VI.7)

 $^{^4 \}rm Questo$ dissenso tra Schrödinger e Heisenberg costituisce un esempio di come *non* dovrebbe svilupparsi una disputa scientifica.



Figura VI.4. Un fotone γ proveniente da sinistra è diffuso, mediante effetto Compton, dall'elettrone *e*. Tutti i fotoni diffusi entro l'angolo 2ε sono raccolti dalla lente *L* e inviati al rivelatore (non mostrato in figura).

Si osservi che per scrivere questa equazione non è necessario conoscere la quantità di moto dell'elettrone prima della diffusione. Le lunghezze d'onda $\lambda' \in \lambda''$ sono determinate dall'equazione di Compton:

$$\lambda_d - \lambda_i = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \tag{VI.8}$$

ove *θ* è l'angolo di diffusione. Siccome nel caso illustrato nella figura VI.4 l'angolo *ε* è molto piccolo, ne segue che l'angolo di diffusione è $\approx \pi/2$ per entrambe le direzioni $\lambda' \in \lambda''$. Quindi: $\lambda'' \approx \lambda'$. Pertanto, dalla (VI.7), ponendo sin $\varepsilon \approx \varepsilon$:

$$\Delta p_x = p_x'' - p_x' = \approx 2 \frac{h}{\lambda'} \varepsilon \tag{VI.9}$$

D'altra parte, siccome il potere risolutore del microscopio è

$$\Delta x \approx \lambda' / (2\sin\varepsilon) \approx \lambda' / 2\varepsilon$$

ne segue che ⁵:

$$\Delta x \Delta p_x \approx h \tag{VI.10}$$

Heisenberg, dopo aver presentato a parole l'esperimento ideale e prima di scrivere l'equazione (VI.10), commenta: «...qui scorgiamo una spiegazione intuitiva diretta della relazione $\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} = h/(2\pi i)$ [200, trad. it. p. 49]». Quindi, secondo Heisenberg, questo esperimento ideale illustra in modo

⁵Heisenberg non svolge i calcoli, ma afferma semplicemente che, tenendo conto dell'effetto Compton, si giunge all'equazione VI.10.

'intuitivo e visualizzabile' la relazione di non commutazione tra gli operatori di posizione e di quantità di moto.

La relazione (VI.10) è ottenuta sfruttando l'espressione del potere risolutore di un microscopio. Questa espressione riguarda la distanza minima Δx tra due punti che il microscopio può rivelare come punti distinti. Quindi la relazione di 'indeterminazione' (VI.10) è dovuta da un lato, alla limitata accuratezza della misura di posizione e, dall'altro, alla conseguente limitata accuratezza della misura (indiretta) della quantità di moto dei fotoni (la lente raccoglie indiscriminatamente tutti i fotoni racchiusi nell'angolo 2ε). Inoltre, le equazioni usate nella derivazione, sono deterministiche: esse non introducono, di per sé, alcuna 'indeterminazione'. Alla fine, il fatto che nella equazione di 'indeterminazione' compaia la costante di Planck *h* è dovuta al fatto che questa costante compare nell'espressione della quantità di moto del fotone. In conclusione: l'esperimento ideale è un esperimento classico, in cui l'indeterminazione' è dovuta alla limitata accuratezza delle misure. Ritorneremo su questo esperimento ideale più avanti, dopo aver richiamato gli sviluppi successivi⁶.

VI.4.1 Le disuguaglianze di Kennard e Robertson

Nel 1927, Kennard dimostrò un teorema secondo cui, per ogni funzione di stato normalizzata ψ vale la seguente disuguaglianza [201]:

$$\sigma_x \sigma_{p_x} \ge \frac{\hbar}{2} \tag{VI.11}$$

dove σ_{p_x} e σ_x sono le *deviazioni standard* della componente della quantità di moto p_x e della coordinata *x*. Dove cioè:

$$\sigma_{p_x}^2 = (\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2$$
(VI.12)

$$\sigma_x^2 = (\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$
(VI.13)

Coppie di grandezze fisiche come $x \in p_x$ il cui commutatore è uguale a $\pm i\hbar$ sono dette incompatibili (perché i loro operatori non commutano) e coniugate (perché il loro commutatore è uguale a $\pm i\hbar$).

Infine, nel 1929, Robertson dimostrò che, per ogni coppia di grandezze fisiche *A* e *B* i cui operatori non commutano vale la disuguaglianza [202, p. 164]:

$$\sigma_A \sigma_B \ge \frac{1}{2} \left| \int \psi^* \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \psi d\tau \right| \tag{VI.14}$$

⁶Heisenberg introduce anche relazioni analoghe alla (VI.10) per le coppie energia - tempo e azione - angolo.

dove $[\hat{A}, \hat{B}] = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ è il commutatore relativo alle due grandezze fisiche $A \in B$. Si osservi come la disuguaglianza di Robertson valga anche per coppie di grandezze incompatibili e non coniugate, cioè per coppie di grandezze il cui commutatore è dato da $i\hat{C} \neq i\hbar^7$. La disuguaglianza di Robertson include, come caso particolare, quella di Kennard.

Le disuguaglianze di Kennard e Robertson sono una diretta conseguenza del formalismo della meccanica quantica. Esse sono concettualmente distinte dalla relazione derivata da Heinsenberg mediante l'esperimento ideale con il microscopio a raggi gamma.

Nella derivazione della disuguaglianza di Kennard o di Robertson non interviene in alcun modo la questione della misura delle grandezze fisiche coinvolte e della sua accuratezza. Queste disuguaglianze sono solo la conseguenza della natura probabilistica della meccanica quantica che prevede, per esempio per la posizione dell'elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, una distribuzione di probabilità. Se intendiamo correlare questa distribuzione di probabilità a misure *ideali* di posizione, dobbiamo procedere nel modo seguente. Dobbiamo avere a disposizione un certo numero N di atomi di idrogeno nello stato fondamentale ed operare su ciascuno di essi una misura di posizione esatta. Allora, la distribuzione statistica delle misure di posizione tenderà a coincidere con la distribuzione di probabilità della posizione dell'elettrone predetta dalla meccanica quantica al crescere di N. Dovremmo poi effettuare misure esatte della quantità di moto dell'elettrone su un altro campione di N atomi di idrogeno e verificare che, al crescere di N, la distribuzione statistica delle misure tende alla distribuzione di probabilità prevista dalla meccanica quantica. Queste considerazioni confermano che le disuguaglianze di Kennard e di Robertson non riguardano l'accuratezza della misure, ma riflettono solo la natura probabilistica della meccanica quantica. In particolare, queste disuguaglianze non descrivono alcuna correlazione tra le misure di posizione e di quantità di moto. Siccome i due tipi di misure sono effettuati su insiemi di campioni distinti, la eventuale variazione della quantità di moto dell'elettrone dovuta ad una misura della sua posizione non è presa in considerazione da queste disuguaglianze. Peraltro, prescindendo dalla richiesta di misure esatte (prive di errore), è necessario osservare come non si conoscano procedure che permettano di misurare la posizione dell'elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno o la sua quantità di moto istantanea.

⁷Un esempio di grandezze incompatibili e non coniugate è dato dalle componenti del momento angolare: $[L_x, L_y] = i\hbar L_z; [L_x, L_z] = -i\hbar L_y.$

VI.4.2 Il significato fisico delle disuguaglianze HKR

La disuguaglianza di Kennard (VI.11) e quella derivata da Heisenberg sulla base dell'esperimento ideale con il microscopio a luce γ (VI.10) hanno un significato fisico diverso, perché diverso è il significato del prodotto $\Delta x \Delta p_x$. Per Kennard, si tratta del prodotto delle deviazioni standard dei possibili valori di $x e p_x$ previsti dalla teoria. Per Heisenberg, i Δ rappresentano invece l'ampiezza della inaccuratezza con cui le due grandezze sono misurate. In comune, le due relazioni hanno solo il valore del secondo membro dell'equazione, valore che è dell'ordine di h. Questo fatto è dovuto ad una ragione di fondo: nel mondo microscopico, la grandezza fisica azione è quantizzata ed il suo valore minimo è dell'ordine di h.

Consideriamo due intervalli $\Delta x \in \Delta p_x$ delle relative grandezze fisiche. Abbiamo visto sinora che questi intervalli possono essere sia le deviazioni standard di Kennard sia le ampiezze dell'inaccuratezza con cui le misure delle grandezze sono effettuate (microscopio a raggi gamma). Dobbiamo aggiungere che $\Delta x \in \Delta p_x$ possono anche rappresentare gli intervalli in cui le relative grandezze fisiche possono variare. Vediamo perché. Siccome il prodotto $\Delta x \Delta p_x$ ha le dimensioni di un'azione – se l'azione è quantizzata – tale prodotto non può essere minore di *h*, cioè del quanto elementare di azione. Pertanto, come ordine di grandezza minimo:

$$\Delta x \Delta p_x \approx h \tag{VI.15}$$

La terza variante del significato dei Δ permette di usare la (VI.11) o la (VI.15) come un principio euristico per valutare ordini di grandezza di grandezze fisiche. Se si usa la disuguaglianza di Kennard, si assume che gli intervalli in cui la posizione e la quantità di moto della particella possono variare sono rappresentate dalle deviazioni standard dei valori possibili di queste grandezze previste dalla teoria. Consideriamo, per esempio, un oscillatore armonico. La sua energia 'classica' è data da:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$
 (VI.16)

Se p può variare nell'intervallo Δp e x nell'intervallo Δx dove i Δ obbediscono alla disuguaglianza di Kennard (VI.11), possiamo esprimere l'energia dell'oscillatore con la formula:

$$E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$$
 (VI.17)

Se scegliamo il valore minimo del prodotto dei Δ , abbiamo, per esempio, $\Delta p = \hbar/(2\Delta x)$. Sostituendo questo valore di Δp nella (VI.17), otteniamo:

$$E = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$$
(VI.18)

Cerchiamo il valore *minimo* dell'energia in funzione di Δx . Dobbiamo allora porre uguale a zero la $dE/d(\Delta x)$. Otteniamo così che $\Delta x = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$. Sostituendo questo valore di Δx nella (VI.18) otteniamo infine:

$$E = \frac{\hbar\omega}{4} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{VI.19}$$

otteniamo cioè, l'energia di punto zero per l'oscillatore armonico come somma di due termini uguali corrispondenti al valore medio dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, rispettivamente. Si noti che si giunge allo stesso risultato svolgendo i calcoli in funzione di Δp . In questo caso, il valore minimo dell'energia dell'oscillatore corrisponde a $\Delta p = \sqrt{\hbar m \omega/2}$. Naturalmente, il prodotto dei valori di Δx e Δp che rendono minima l'energia è uguale a $\hbar/2$.

Si noti che il calcolo svolto conduce al valore corretto dell'energia per una coincidenza. Infatti, la distribuzione di probabilità della posizione della particella nello stato fondamentale è una gaussiana con una deviazione standard uguale a $\sqrt{\hbar/(2m\omega)}$, cioè una deviazione standard uguale al valore di Δx individuato attraverso la procedura seguita per rendere minima l'energia. A riprova del fatto che è questa coincidenza a condurre al risultato corretto, si può provare a sviluppare un calcolo analogo per l'elettrone dell'atomo di idrogeno. Si otterrebbe così, per lo stato fondamentale dell'elettrone, l'energia:

$$-e^4 m/(8\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2)$$
 (VI.20)

mentre il valore corretto è:

$$-e^4m/(32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2)$$
 (VI.21)

I due valori differiscono per un fattore quattro. Si otterrebbe invece il valore corretto usando la relazione $pr = \hbar$ (p quantità di moto e r distanza dell'e-lettrone dall'origine) invece di quella di Kennard ($pr = \hbar/2$). Ciò conferma che la terza variante delle disuguaglianze HKR, può permettere di valuta-re gli ordini di grandezza, ma il suo uso deve essere praticato con cautela e atteggiamento critico.

Le disuguaglianze di Heisenberg sono nate nel contesto della discussione epistemologica e filosofica tra i padri fondatori della meccanica quantica. Heisenberg, nel suo lavoro del 1927, non usa il termine 'principio di indeterminazione': il termine 'principio' per denotare le disuguaglianze HKR compare in letteratura verso la fine degli anni Venti [199, sez. 2.4]. Siccome le disuguaglianze HKR sono una conseguenza dei postulati della meccanica quantica, postulati tra i quali non compare il 'principio di indeterminazione', sembra ragionevole non usare la dizione 'principio di indeterminazione'. Anche le altre denominazioni (relazioni di inaccuratezza, relazioni di incertezza, relazioni di indeterminazione) oscurano il fatto che le disuguaglianze in questione hanno tre significati fisici diversi. Appare pertanto ragionevole usare la dizione 'disuguaglianze HKR': questa dizione lascia aperta la possibilità di porne in luce il triplice significato fisico e, inoltre, ha il pregio di essere filosoficamente neutra.

VI.4.3 La disuguaglianza energia - tempo

Nei testi di meccanica quantica compare anche una disuguaglianza energia - tempo:

$$\Delta E \Delta t \ge \frac{\hbar}{2} \tag{VI.22}$$

Come richiamato nella nota 6, una disuguaglianza di questo tipo era stata introdotta da Heisenberg nel suo articolo del 1927 [200, trad. it. p. 52 - 54]. Questa disuguaglianza pone due problemi. Il primo è legato al fatto che, non essendo la variabile tempo rappresentata da un operatore, la (VI.22) non è un caso particolare della (VI.14). Il secondo, direttamente connesso al primo, riguarda il significato dell'intervallo di tempo Δt che compare nella (VI.22). Non deve quindi sorprendere il fatto che la (VI.22) e il suo significato siano, ancora oggi, oggetto di sofisticate discussioni: si, veda, per esempio la bibliografia citata in [199]. Una derivazione e interpretazione della (VI.22), si trova nel manuale di Griffiths [203, p. 112 - 116]: questa derivazione segue, peraltro, quella assai meno recente, di Mandelstam e Tamm [204].

Se Q è una qualsiasi grandezza fisica, vale l'equazione:

$$\frac{d}{dt} < Q >= \frac{i}{\hbar} < [\hat{H}, \hat{Q}] > + < \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} >$$
(VI.23)

dove \hat{H} è l'operatore hamiltoniano. Se l'operatore \hat{Q} non dipende esplicitamente dal tempo, se cioé $\partial \hat{Q} / \partial t = 0$, la disuguaglianza di Robertson (VI.14) per le grandezze fisiche *H*, *Q* assume la forma:

$$\sigma_H \sigma_Q \ge \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d < Q >}{dt} \right| \tag{VI.24}$$

Se poniamo:

$$\Delta t = \frac{\sigma_Q}{\left|\frac{d < Q >}{dt}\right|} \tag{VI.25}$$

e $\sigma_H = \Delta E$, otteniamo la (VI.22). Il significato di Δt appare chiaro se riscriviamo la (VI.25) sotto la forma:

$$\sigma_Q = \left| \frac{d < Q >}{dt} \right| \Delta t \tag{VI.26}$$

Cioè: Δt è l'intervallo di tempo necessario affinché il valore di aspettazione della grandezza Q possa variare di una deviazione standard. Naturalmente Δt , così definito, dipende dalla grandezza Q scelta. Tuttavia, un ΔE comunque piccolo, comporta una lenta variazione di tutte le grandezze fisiche del sistema. La (VI.22), ricavata come mostrato sopra, correla la distribuzione di probabilità dei valori dell'energia agli intervalli di tempo necessari affinché il valore di aspettazione della grandezza fisica scelta possa variare di una deviazione standard. Anche in questo caso, come nella disuguaglianza non riguarda l'accuratezza delle eventuali misure effettuate, ma è solo una diretta conseguenza della natura probabilistica della teoria.

Appare tuttavia evidente come la disuguaglianza energia - tempo ricavata alla Maldelstam - Tamm abbia una applicazione limitata; in particolare, non è applicabile alla vita media - larghezza di riga di uno stato elettronico eccitato. Nella bibliografia citata in [199] si trovano diverse derivazioni della disuguaglianza energia - tempo. Tra queste, è opportuno richiamare quella dovuta a Vaidman [205]. Partendo dalla formula, dimostrata in [206, p. 15]:

$$\hat{A}|\psi\rangle = <\hat{A}>|\psi\rangle + \Delta A|\psi_{\perp}\rangle \tag{VI.27}$$

valida per ogni operatore \hat{A} ed ogni vettore di stato $|\psi\rangle$ e dove $|\psi_{\perp}\rangle$ è uno stato ortogonale a $|\psi\rangle$, si dimostra che

$$\Delta E \Delta t \ge \frac{h}{4} \tag{VI.28}$$

dove ΔE è la deviazione standard dell'energia dello stato $|\psi\rangle = \Delta t$ l'intervallo di tempo necessario per la transizione allo stato ortogonale $|\psi_{\perp}\rangle : \Delta t$ può quindi essere interpretato come la vita media dello stato $|\psi\rangle$.

VI.5 La meccanica quantica è una teoria completa?

Nel 1935 apparve su *Physical Review* un articolo intitolato 'La descrizione quantica della realtà fisica può essere considerata completa?' [197]. Gli autori erano Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen e l'articolo era il risultato di una serie di discussioni tra Einstein e i suoi due giovani collaboratori. L'articolo fu materialmente scritto da Podolsky e, a quanto pare, la versione finale non fu rivista da Einstein⁸.

VI.5.1 L'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen

La premessa del lavoro è di natura filosofica:

Ogni seria valutazione di una teoria fisica deve tener conto della distinzione tra *la realtà oggettiva, che è indipendente da ogni teoria,* e i concetti fisici usati dalla teoria. Si ritiene che questi concetti corrispondano alla realtà oggettiva, e noi creiamo una immagine della realtà usando questi concetti [197, p. 777; corsivi miei].

La premessa distingue quindi tra realtà oggettiva, indipendente dall'osservatore, e descrizione di essa. Affermando che «si ritiene che questi concetti corrispondano alla realtà oggettiva» si stabilisce una relazione tra 'realtà oggettiva' e descrizione di essa. Tuttavia, EPR non specificano in che cosa consista questa relazione.

Senza definire che cosa si intende per 'realtà fisica', EPR formulano una *condizione sufficiente*:

Se, senza disturbare in alcun modo un sistema, possiamo prevedere con certezza (cioè con probabilità uguale ad uno) il valore di una grandezza fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a questa grandezza fisica [197, p. 777].

A prima vista non è chiaro se la realtà fisica coincide con la realtà oggettiva o se la realtà fisica riguarda la descrizione fisica della realtà oggettiva. Nel primo caso – in base alla condizione sufficiente – un algoritmo sarebbe in grado di stabilire l'esistenza nel Mondo di una grandezza fisica e, quindi, anche dell'entità teorica di cui la grandezza fisica descrive una proprietà. Questa possibilità è incompatibile con l'esistenza di una realtà oggettiva «indipendente da ogni teoria». Dobbiamo quindi concludere che il concetto di realtà

⁸Einstein scriveva a Schrödinger nel 1935: «Per motivi linguistici, l'articolo è stato scritto da Podolsky, dopo diverse discussioni. Tuttavia, l'articolo non è venuto fuori così come avrei voluto; piuttosto, la cosa essenziale è stata, per così dire, offuscata dal formalismo [207, p. 35].»

fisica opera all'interno di una descrizione fisica del Mondo (o di una parte di esso).

Peraltro, la 'condizione sufficiente', se applicata in alcuni contesti fisici, conduce a risultati non accettabili. Per esempio. Se un fotone ha attraversato un polarizzatore lineare il cui asse ottico è diretto lungo l'asse z, il fotone - dopo il polarizzatore - è polarizzato linearmente lungo l'asse z. Allora, possiamo predire con certezza, cioè con probabilità uguale ad uno, che esso attraverserà un secondo polarizzatore lineare orientato come il primo. Quindi, la condizione 'sufficiente' è soddisfatta e, pertanto, la polarizzazione lineare del fotone è un 'elemento di realtà fisica'. Se, invece, l'asse ottico del secondo polarizzatore forma un angolo θ con l'asse z, sappiamo solo che la probabilità del fotone di attraversare il secondo polarizzatore è pari a $\cos^2\theta$. In questo caso, non essendo soddisfatta la condizione 'sufficiente', non possiamo affermare - anche se non possiamo escuderlo - che la polarizzazione del fotone costituisce 'un elemento della realtà fisica'⁹. Quindi, l'essere o no un 'elemento di realtà fisica' dipenderebbe dal tipo di misura che intendiamo effettuare: questo risultato non è metodologicamente accettabile. Parafrasando EPR, potremmo infatti concludere che 'nessuna definizione ragionevole di realtà potrebbe permettere questo [197, p. 780]. Quindi, la 'condizione sufficiente' andrebbe enunciata introducendo l'ulteriore specificazione che essa deve valere 'in almeno un contesto fisico'. In questo modo, la polarizzazione del fotone sarebbe un 'elemento della realtà fisica' in entrambi i casi considerati.

Si osservi infine che la condizione sufficiente, sebbene enunciata per la fisica quantica, dovrebbe valere anche per la fisica classica. Diversamente, sarebbe necessario spiegare perché le due fisiche richiedono una diversa valutazione del loro rapporto con la realtà oggettiva.

Di nuovo, senza definire cosa si intenda per 'completa' a proposito di una teoria, EPR formulano una *condizione necessaria*:

Ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria [197, p. 777].

Cosa significa 'avere una controparte nella teoria'? Potrebbe voler dire che la teoria deve descrivere quantitativamente una grandezza fisica che, in base alla 'condizione sufficiente' costituisce un 'elemento della realtà fisica'. Ma questo significato non permetterebbe la dimostrazione della tesi EPR. Se,

⁹Essendo la condizione 'sufficiente' ma non necessaria, la polarizzazione del fotone potrebbe essere comunque un 'elemento della realtà fisica' sulla base di un'altra condizione sufficiente.

invece, la 'condizione necessaria' richiedesse che una teoria deve attribuire – *in ogni contesto fisico* – un valore definito ad una grandezza fisica che sulla base della 'condizione sufficiente' costituisce un 'elemento di realtà fisica', allora la tesi EPR può essere dimostrata.

Dopo la definizione della condizione sufficiente e di quella necessaria, EPR considerano un sistema fisico composto da due parti. Le due parti possono interagire dall'istante t = 0 all'istante t = T; per t > T non è più possibile alcuna interazione tra le due parti. Se A e B sono due grandezze fisiche, quando le due parti non interagiscono più, una misura della grandezza fisica A sulla parte 1 lascerà la parte 2 in uno stato definito ψ_2 (riduzione della funzione d'onda). Se, invece, si misura la grandezza fisica B sulla parte 1, la parte 2 verrà lasciata in uno stato differente, φ_2 . Può accadere che ψ_2 e φ_2 siano autofunzioni di due operatori che non commutano, corrispondenti alle grandezze fisiche P e O. Allora, senza in alcun modo perturbare la parte 2, possiamo prevedere con certezza i valori delle grandezze fisiche incompatibili (i cui operatori non commutano) P e Q della parte 2. Di conseguenza, le grandezze fisiche P e Q della parte 2 sono elementi della realtà fisica: in quanto tali, esse dovrebbero essere descritte da una teoria completa. Ma la meccanica quantica afferma che P e Q non possono avere simultaneamente valori definiti: quindi, la meccanica quantica è incompleta. Questa conclusione è possibile solo se la 'condizione necessaria' è interpretata nel modo indicato più sopra.

Per trattare un caso esemplare, EPR applicano questo tipo di argomentazione al caso di due particelle descritte da una funzione d'onda unidimensionale: la differenza delle coordinate delle due particelle $x_1 - x_2$ e la somma delle loro quantità di moto $p_{1_x} + p_{2_x}$ hanno valori definiti, x_0 e 0, rispettivamente. Ciò è possibile perché le grandezze $x_1 - x_2$ e $p_{1_x} + p_{2_x}$ sono compatibili, cioè i loro operatori commutano. Per questo sistema, se una misura di x_1 fornisce il valore $x_1 = x$, noi sappiamo con certezza che una misura di x_2 darà $x_2 = x + x_0$. D'altra parte, se una misura di p_{1_x} fornisce p, noi sappiamo con certezza che una misura di p_{2_x} darà -p. Quindi, x_2 e p_{2_x} sono elementi di realtà fisica. Ma la meccanica quantica afferma che x_2 e p_{2_x} non possono avere simultaneamente valori definiti. Pertanto la meccanica quantica è incompleta perché non descrive tutti gli elementi della realtà fisica. Anche qui, la conclusione è lecita solo se la 'condizione necessaria' è interpretata come richiedente che una teoria completa deve, in qualunque contesto fisico, attribuire un valore definito ad ogni grandezza fisica che, in base alla condizione sufficiente, costituisce 'un elemento della realtà fisica'.

EPR riconoscono questo punto quando affermano:

Effettivamente, non si arriverebbe alla nostra conclusione se si richiede che due o più grandezze fisiche possono essere considerate elementi simultanei della realtà fisica *solo quando esse possono essere misurate o predette simultaneamente* [197, p. 780; corsivo originale].

Tuttavia, EPR aggiungono:

Da questo punto di vista, poiché solo l'una o l'altra, ma non entrambe le grandezze P e Q posso essere predette, esse non sono simultaneamente reali. Ciò rende la realtà di *P* e *Q* dipendente dal processo di misura effettuato sul primo sistema, che non disturba in alcun modo il secondo sistema. *Nessuna definizione ragionevole di realtà potrebbe permettere questo* [197, p. 780; corsivo mio].

Più sopra, abbiamo visto come questa conclusione valga anche nel caso del fotone polarizzato linearmente: 'il fatto che la polarizzazione del fotone costituisca o meno un 'elemento della realtà fisica' dipende dalla scelta dell'orientazione del secondo polarizzatore; pertanto, 'nessuna definizione ragionevole di realtà potrebbe permettere questo'.

Poiché – al fine di permettere la dimostrazione della tesi EPR – la 'condizione necessaria' deve essere interpretata come specificato più sopra, il concetto di 'elemento della realtà fisica', diventa superfluo. Si dovrebbe allora ridefinire la condizione necessaria affinché una teoria sia completa affermando che:

Se possiamo predire con certezza (cioè con probabilità uguale ad uno) il valore di una grandezza fisica, allora una teoria completa deve permettere che questa grandezza fisica abbia *in ogni caso* un valore definito.

Questa condizione, ovviamente, non può essere soddisfatta dalla meccanica quantica quando si considerino due grandezze fisiche i cui operatori non commutino. Questa riformulazione dell'argomentazione EPR ne pone in evidenza l'intimo significato: richiedere alla meccanica quantica ciò che essa non può dare. Da questo punto di vista, il ricorso all'elemento di realtà fisica' serve solo per vestire con ambigui ornamenti filosofici una argomentazione che, tecnicamente, si riduce ad una richiesta ovviamente non esaudibile.

Alla argomentazione EPR può essere rivolta anche un'obiezione suggerita da criteri epistemologici generali. Una teoria dovrebbe essere valutata non sulla base di una pur sempre discutibile definizione di completezza, ma sulla base di valutazioni suggerite da un'analisi dell'evoluzione storica della fisica: è internamente coerente? può essere sviluppata in modo assiomatico? le sue predizioni sono corroborate dall'esperimento? descrive quantitativamente tutti i fenomeni che ragionevolmente rientrano nel suo dominio di applicazione? Storicamente, questi criteri sono stati quelli che hanno deciso le sorti delle teorie o la delimitazione del loro campo di applicazione: il caso della meccanica quantica non dovrebbe costituire un'eccezione.

Nell'articolo EPR non compare mai esplicitamente alcun riferimento a concetti quali la località o la separabilità, concetti emersi solo successivamente. La ragione risiede nel fatto che le catene deduttive usate nell'articolo non utilizzano né l'una né l'altra. L'unico accenno a qualcosa che richiami la località, è contenuta nella frase: «D'altra parte, siccome all'istante della misura i due sistemi non interagiscono più, nessun cambiamento reale può verificarsi nel secondo sistema in conseguenza di qualsiasi cosa che possa essere fatta sul primo sistema. Ciò, naturalmente, è meramente una asserzione che chiarisce cosa si intende per l'assenza di interazione tra i due sistemi [197, p. 779]».

L'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen, ben presto denotato come EPR¹⁰, ha suscitato sin da subito una discussione assai vivace che ha dato origine ad una vastissima letteratura. Il peccato originale dell'argomentazione EPR consistente nell'avere mescolato ambigue considerazioni filosofiche alla questione tecnica riguardante la completezza della meccanica quantica, non è stato redento: anzi, l'intreccio spurio tra filosofia e fisica si è accentuato a discapito della necessaria e vitale separazione tra teorie fisiche e riflessione filosofiche su di esse. Il lettore interessato ad approfondire l'evoluzione storica di questo dibattito può proficuamente iniziare dal volume di Jammer [208] e fare riferimento, per quanto riguarda la letteratura recente, alle bibliografie contenute in [210] e in [209].

VI.5.2 La versione di Bohm dell'esperimento mentale EPR

Nel 1951 David Bohm ha proposto una versione dell'esperimento mentale ideato da EPR in cui le grandezze da misurare non sono più la coordinata xe la corrispondente quantità di moto p_x , bensì le componenti dello spin di due particelle con spin uguale a $\hbar/2$. L'argomento EPR è quindi riformulato

¹⁰Con l'acronimo EPR si denota, indifferentemente, l'articolo e le argomentazioni in esso sviluppate. Siccome queste argomentazioni si basano sul presupposto che le predizioni statistiche della meccanica quantica siano corrette e queste argomentazioni conducono alla conclusione che la meccanica quantica è una teoria incompleta, si parla anche di 'paradosso EPR'.

nel modo seguente. Supponiamo che due particelle dotate di spin $\hbar/2$ costituiscano una molecola a spin totale nullo. Allora, la molecola è descritta dalla funzione d'onda:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi^+(1)\psi^-(2) - \psi^-(1)\psi^+(2)]$$
(VI.29)

Le due particelle sono quindi separate. Quando le due particelle sono *suf-ficientemente lontane da impedire qualunque loro interazione*, una qualunque componente (per esempio lungo la direzione *x*) dello spin della particella 1 è misurata. Supponiamo che l'esito della misura sia $+\hbar/2$. Allora sappiamo immediatamente, senza eseguire alcuna misura sulla particella 2, che la sua componente di spin lungo $x \ge -\hbar/2$. Quindi, secondo la condizione sufficiente EPR, la componente *x* dello spin è un elemento di realtà fisica. Tuttavia, siccome avremmo potuto scegliere, invece della direzione *x*, la direzione *y* (*z*), ed applicare ad essa il ragionamento svolto per la componente *x*, dovremmo concludere che anche la componente *y* (*z*) dello spin è un elemento della realtà fisica. Ma la meccanica quantica non può attribuire un valore definito alle componenti *x* e *y* (*z*) dello spin, perché i loro operatori non commutano. Quindi, la meccanica quantica non soddisfa la condizione necessaria perché una teoria fisica sia completa. Pertanto, la meccanica quantica è incompleta.

VI.5.3 La teoria a variabili nascoste di Bohm

A partire dagli anni Cinquanta del secolo scorso si è sviluppata la ricerca di teorie dette 'a variabili nascoste' con lo scopo di ottenere una descrizione univoca (non probabilistica) dei sistemi atomici. In queste teorie, secondo David Bohm:

Le probabilità quanto - meccaniche (come le loro controparti nella meccanica statistica classica) sono considerate solo come una necessità pratica e non come la manifestazione della mancanza intrinseca di una completa determinazione delle proprietà della materia a livello quantico [211, p. 166].

Queste teorie adottano il formalismo della meccanica quantica e mirano a riprodurne le predizioni. L'obiettivo di queste teorie consiste nel trasformare un formalismo intrinsecamente probabilistico in modo tale da permettere, per esempio, una descrizione spazio - temporale e, quindi, deterministica, del moto di una particella. Questa procedura è esattamente opposta a quella della fisica statistica classica, in cui leggi deterministiche come quelle della dinamica newtoniana sono sostituite, per la complessità del problema dovuta al numero delle particelle coinvolte, da leggi statistiche che descrivono il comportamento medio delle particelle.

Nella teoria a variabili nascoste di Bohm, si ottiene una descrizione spazio - temporale del moto di una particella (e quindi, una sua descrizione deterministica) introducendo un 'potenziale quantico' che opera, nell'equazione di Schödinger, accanto al potenziale classico. In questa descrizione, la posizione della particella e la sua quantità di moto, pur avendo valori definiti per postulato, non sono sperimentalmente accessibili con la precisione necessaria per individuare in modo soddisfacente la traiettoria della particella e la velocità con cui essa è percorsa. Riappare così la relazione di indeterminazione di Heisenberg, che, tuttavia, non è intrinseca al formalismo matematico usato ma imputabile solo alle limitazioni strumentali. Pertanto:

...le posizioni e le quantità di moto [della particella] dovrebbero esser considerate come variabili 'nascoste', poiché – come mostreremo nell'articolo II – non siamo in grado di eseguire esperimenti che permettano di localizzarle in una regione più piccola di quella in cui l'intensità del campo ψ è apprezzabile [211, p. 171].

La funzione d'onda ψ è scritta come ¹¹:

$$\psi = Re^{iS/\hbar} \tag{VI.30}$$

dove $R(\vec{r}, t)$ e $S(\vec{r}, t)$ sono funzioni reali delle coordinate e del tempo. La funzione d'onda obbedisce all'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\vec{r})\psi \qquad (\text{VI.31})$$

Ne segue che:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(P \frac{\nabla S}{m} \right) = 0 \qquad (\text{VI.32})$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S^2)}{2m} + V(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla P)^2}{P^2} \right] = 0 \qquad (VI.33)$$

dove $P(\vec{r}) = R(\vec{r})^2$ è la densità di probabilità. Nel limite classico ($\hbar \rightarrow 0$) la funzione $S(\vec{r})$ è la soluzione dell'equazione di Hamilton - Jacobi e rappresenta l'azione della particella. Se consideriamo un ensemble di traiettorie

¹¹Seguiamo qui, quasi alla lettera, il testo di Bohm [211, p. 169 - 170]

che sono soluzioni dell'equazione del moto, allora un teorema della meccanica afferma che se tutte queste traiettorie sono perpendicolari a una data superficie ad *S* costante, allora esse saranno perpendicolari a tutte le superfici ad *S* costante e $\nabla S(\vec{r})/m$ sarà uguale al vettore velocità $\vec{v}(\vec{r})$ per ogni particella passante per il punto \vec{r} .

In questo limite classico, l'equazione (VI.32) assume la forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P\vec{v}) = 0 \tag{VI.34}$$

È pertanto consistente considerare $P(\vec{r})$ come la densità di probabilità per le particelle dell'ensemble. Allora, possiamo considerare $P\vec{v}$ come la corrente media di particelle dell'ensemble e l'equazione (VI.34) esprime la conservazione della probabilità.

Cosa succede per $\hbar \neq 0$? Se assumiamo che sulla particella agisca, oltre al potenziale classico $V(\vec{r})$ anche il *potenziale quantico* $U(\vec{r})$ dato da ¹²:

$$U(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla P)^2}{P^2} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$$
(VI.35)

allora possiamo continuare a considerare l'equazione (VI.33) come l'equazione di Hamilton - Jacobi per l'ensemble di particelle e $\nabla S(\vec{r})/m$ come la velocità della particella e l'equazione (VI.32) come descrivente la conservazione della probabilità dell'ensemble.

Invece di risolvere l'equazione di Hamilton - Jacobi, si può integrare l'equazione di Newton aggiungendo al potenziale 'classico' quello quantico:

$$m\frac{d\vec{r}}{dt} = -\nabla \left[V(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right]$$
(VI.36)

dove la condizione iniziale è costituita dal valore \vec{r}_0 di \vec{r} all'istante t = 0. La quantità di moto iniziale è allora determinata dalla equazione:

$$m\vec{v} = \nabla S(\vec{r}_0)/m$$

Siccome il valore \vec{r}_0 non è sperimentalmente accessibile con la necessaria precisione, *la posizione iniziale della particella svolge il ruolo di variabile nascosta*.

La trattazione di Bohm non costituisce una teoria alternativa alla meccanica ondulatoria ma solo una sua *rielaborazione deterministica a posteriori* resa possibile dall'introduzione del potenziale quantico. La funzione

¹²In realtà, si tratta di energie potenziali.

d'onda ψ è infatti calcolata usando la meccanica ondulatoria. Nota la ψ , usando l'equazione di Schrödinger, si ottengono le equazioni per le funzioni $R \in S$. Da un punto di vista epistemologico, questa rielaborazione a posteriori della meccanica ondulatoria è esposta ad una radicale critica di fondo. Se la descrizione intrinsecamente probabilistica della meccanica quantica è considerata insoddisfacente, si dovrebbe cercare una teoria interamente nuova che permetta, intrinsecamente, una descrizione deterministica dei sistemi atomici¹³. Invece, la trasformazione di una teoria probabilistica in una deterministica mediante l'introduzione – come nel caso di Bohm – di un 'potenziale quantico' può essere considerata come un'operazione concettualmente artificiosa, tenendo anche conto del fatto che essa conduce alle stesse predizioni della meccanica quantica. Inoltre, la rielaborazione alla Bohm non è mai stata estesa al caso relativistico.

VI.5.4 Intermezzo: la condizione di località

La condizione di località, come richiesto dalla relatività speciale, afferma che non è possibile una interazione fisica tra due eventi separati da una distanza Δz tale che $\Delta z > c\Delta t$ dove Δt è l'intervallo di tempo che separa i due eventi. Pertanto, se due eventi sono separati da una distanza spaziale di questo tipo, allora l'evento che accade prima non può in alcun caso essere preso in considerazione come causa dell'evento successivo. Se i due eventi sono costituiti da due misure, la condizione di località *non* implica l'assenza di correlazione tra i loro risultati, ma *solo* che la loro eventuale correlazione *non* è dovuta ad una interazione fisica propagantesi fra i punti in cui sono effettuate le due misure.

VI.5.5 Il contributo di John Bell

Nel 1964 apparve un articolo che esercitò una profonda influenza sul dibattito aperto quasi trenta anni prima da EPR. Il titolo del lavora era "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox" e l'autore era John Bell [196]¹⁴. In un recente lavoro di rassegna critica si legge:

Il teorema di Bell ha profondamente influenzato la nostra percezione e comprensione della fisica e si colloca tra le più profonde scoperte scientifiche che siano mai state fatte [214, p. 420].

¹³Questa sembra essere stata la posizione di Einstein. Si veda, per esempio, [212, p. 23 - 24] e la bibliografia ivi citata.

¹⁴Nelle pagine che seguono, ho ripreso, sviluppandole e chiarendole, le riflessioni sull'interpretazione degli esperimenti di tipo EPR esposte in [213].

Che il teorema di Bell abbia esercitato una profonda influenza sul dibattito aperto dal lavoro di EPR è un fatto che può essere facilmente verificato guardando a come, dopo il teorema di Bell, si sono sviluppate le ricerche teoriche sull'argomento e, soprattutto, a come il teorema di Bell e le sue generalizzazioni successive hanno stimolato o direttamente suggerito verifiche sperimentali delle disuguaglianze previste dal teorema. Ciò non ostante, riteniamo che l'affermazione secondo cui il teorema di Bell si colloca «tra le più profonde scoperte scientifiche che siano mai state fatte» non sia giustificata. Le pagine seguenti aiuteranno forse il lettore ad elaborare una propria valutazione.

Nell'introduzione, Bell illustra chiaramente il contenuto del teorema:

Il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen [citazione di [197]] fu proposto come una argomentata riflessione secondo la quale la meccanica quantica potrebbe non essere una teoria completa ma dovrebbe invece essere integrata mediante l'uso di variabili aggiuntive. La funzione di queste variabili aggiuntive dovrebbe essere quella di reintrodurre nella teoria la causalità e la località [citazione di un passaggio di Einstein¹⁵]. In questa nota, questa idea sarà formulata matematicamente e si dimostrerà che essa è incompatibile con le predizioni statistiche della meccanica quantica. La difficoltà essenziale è creata dalla richiesta di località, o più precisamente dall'ipotesi che il risultato di una misura su un sistema non è influenzato dalle operazioni compiute su un altro sistema distante con il quale esso ha interagito in passato. Ci sono stati tentativi di dimostrare che non è possibile una interpretazione della meccanica quantica mediante variabili nascoste, anche lasciando cadere la condizione di separabilità o località [citazione dei lavori di von Neumann [215] e di Jauch e Piron [216]]. Questi tentativi sono stati esaminati altrove [citazione di un proprio lavoro, allora in fase di pubblicazione [217]] e sono stati trovati insoddisfacenti. Inoltre, una interpretazione a variabili nascoste della teoria quantica elementare è stata esplicitamente costruita [citazione dei lavori di Bohm [211, 218]]. Questa particolare interpretazione ha invero una struttura grossolanamente non locale. Secondo i risultati che verranno dimostrati qui, questa caratteristica è tipica di ogni teoria di questo genere e che riproduca esattamente le predizioni della meccanica quantica [196, p. 195; corsivo mio].

Il teorema di Bell è stato successivamente generalizzato. È allora utile analizzare per punti la struttura logica dei teoremi di tipo Bell, rinviando la di-

¹⁵Il passaggio citato è il seguente: 'Ma una ipotesi noi dovremmo, a mio giudizio, mantenere ferma: la reale situazione fattuale del sistema S_2 è indipendente da ciò che viene fatto al sistema S_1 che è spazialmente separato dal precedente [26, p. 102]'.
scussione del teorema di Bell (sezione VI.5.5.1) e delle sue generalizzazioni (sezione VI.5.5.2).

- 1. EPR hanno sviluppato una argomentazione secondo cui la meccanica quantica è una teoria incompleta. La meccanica quantica potrebbe essere completata mediante l'introduzione di variabili aggiuntive (dette anche variabili nascoste). Un esperimento EPR è basato sullo studio di un sistema fisico costituito da due parti che, avendo interagito in passato, si sono separate e non interagiscono più. Precisamente, sulle due parti del sistema sono eseguite misure quando la loro distanza Δl è tale che non sia possibile la trasmissione di un'interazione fisica tra i punti in cui sono effettuate le misure ($\Delta l > c\Delta t$) (condizione di località, pagina 234).
- 2. Senza dover specificare i dettagli fisici di un esperimento EPR, è possibile dare all'ipotesi di variabili aggiuntive una forma matematica in modo tale da permettere un confronto con le predizioni della meccanica quantica. La formulazione matematica dell'ipotesi di variabili aggiuntive usa un parametro λ che rappresenta simbolicamente proprietà del sistema fisico non prese in considerazione dalla meccanica quantica. Non è necessario specificare quali siano queste supposte proprietà del sistema. Tuttavia, esse *determinano* l'esito delle misure effettuate sulle due parti del sistema qualunque possa essere il tipo e l'esito delle misure effettuate. Queste proprietà possono variare da un ciclo di misura all'altro: di qui l'opportunità di introdurre una distribuzione di probabilità normalizzata $\rho(\lambda)$ del parametro λ .
- 3. Denotiamo questa formulazione matematica 'teoria a variabili nascoste di tipo Bell': si dimostra che essa, in talune situazioni fisiche, è incompatibile con le predizioni della meccanica quantica. Non è quindi possibile costruire teorie a variabili nascoste alla Bell che riproducano *integralmente* le predizioni della meccanica quantica.

Giuseppe Giuliani - Elettromagnetismo relatività quanti

Un teorema di tipo Bell, può quindi essere enunciato nel modo seguente.

Teorema di tipo Bell

Una teoria a variabili nascoste costruita usando le seguenti assunzioni:

- P1 Il sistema fisico possiede proprietà non prese in considerazione dalla meccanica quantica. Queste proprietà, non specificate, sono descritte formalmente da un parametro λ . Esse *determinano* l'esito delle misure, qualunque sia il loro tipo.
- P2 Le proprietà descritte da λ possono variare da un ciclo di misura all'altro: di qui l'opportunità di introdurre una distribuzione di probabilità normalizzata $\rho(\lambda)$ del parametro λ .
- P3 La condizione di località implica che i risultati delle misure effettuate sulle due parti separate del sistema sono statisticamente indipendenti.

produce predizioni che, in talune circostanze fisiche, sono difformi da quelle della meccanica quantica.

Consideriamo un sistema fisico costituito da due parti I e II che, avendo interagito in passato – perché, per esempio, prodotte dalla stessa sorgente – sono ora separate e non possono più interagire in quanto la distanza spazio - temporale tra le due misure (eventi) è di tipo spaziale ($\Delta l > c\Delta t$). La prima misura, indicata con la lettera *x* è effettuata sulla parte I: sia *a* il suo risultato. Analogamente, indichiamo con *y* la misura effettuata successivamente sulla parte II e sia *b* il suo risultato. Per le assunzione P1 e P3, dobbiamo scrivere:

$$p(ab|xy,\lambda) = p(a|x,\lambda)p(b|y,\lambda)$$
(VI.37)

Per l'assunzione P2, il parametro λ potrebbe variare da una misura all'altra: è quindi opportuno introdurre anche una distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$ normalizzata. Avremo quindi:

$$p(ab|xy) = \int \rho(\lambda) p(a|x,\lambda) p(b|y,\lambda) d\lambda$$
(VI.38)

In [214], questa equazione è illustrata così:

L'assunzione della località implica che noi dovremmo individuare un insieme di fattori passati, descritti da qualche variabile λ , aventi una influenza causale congiunta sull'esito delle due misure, e che debbono rendere pienamente conto della dipendenza tra *a* e *b*. Una volta che tutti questi fattori sono stati tenuti in considerazione, le indeterminazioni residue concernenti i risultati debbono ora essere disaccoppiate; cioè, le probabilità per *a* e *b* dovrebbero essere fattorizzate:

$$p(ab|xy) = \int \rho(\lambda) p(a|x,\lambda) p(b|y,\lambda) d\lambda$$

Questa condizione di fattorizzazione esprime semplicemente il fatto che noi abbiamo trovato una spiegazione secondo cui la probabilità di *a* dipende solo dalle variabili passate λ e dalla misura locale *x*, ma non dalla misura lontana e dal suo valore e analogamente per la probabilità di ottenere *b* [214, p. 421].

Dalla (VI.38) si può derivare la disuguaglianza di Bell (VI.41) o la disuguaglianza CHSH (VI.42).

Il ruolo cruciale svolto dall'equazione (VI.38) nella deduzione delle disuguaglianze di tipo Bell è stata posta in evidenza da molti. Per esempio, i già citati [214], scrivono:

È piuttosto frequente vedere un articolo che sostiene di [poter] "falsificare" il teorema di Bell o che è stato trovato un errore nella derivazione delle disuguaglianze di Bell. Tuttavia, *se si accetta la definizione* (VI.38), è un teorema matematico banale [dimostrare] che questa definizione è incompatibile con certe predizioni quanto - meccaniche [214, p. 421; corsivo mio].

L'equazione (VI.38) deriva dall'uso congiunto delle assunzioni P1, P2 e P3. Gli esperimenti EPR dimostrano che i risultati delle misure effettuate sulle parti separate del sistema *sono* statisticamente dipendenti (sezione VI.5.7) e, al contempo, che le predizioni della meccanica quantica sono corroborate. Quindi, almeno una delle assunzioni P1, P2 e P3 deve essere falsa. L'assunzione maggiormente indiziata è la P3, perché stabilisce esplicitamente l'indipendenza statistica tra i risultati delle due misure. Infatti, la condizione di località implica solo che l'eventuale correlazione tra i risultati delle misure sulle parti separate del sistema ($\Delta l > c\Delta t$) non possa essere dovuta ad una interazione fisica propagantesi da una parte all'altra. Ma la località non esclude che questa correlazione sia dovuta ad una proprietà del sistema contenuta nella funzione di stato che lo descrive (pag. 234). Oppure, l'assunzione falsa è la P1, cioè l'assunzione che sia possibile sovrapporre al formalismo della meccanica quantica variabili nascoste, cioè proprietà diverse da quelle descritte dalla funzione di stato. Oppure, ancora, sono false P1 e P3. Nel caso fosse falsa P3, cioè l'assunzione che la località implica l'indipendenza statistica tra i risultati delle misure effettuate sulle due parti separate del sistema, la rilevanza dei teoremi alla Bell sarebbe fortemente ridotta. In ogni caso, *i risultati sperimentali dimostrano che teorie a variabili nascoste costruite secondo le assunzioni P1, P2 e P3 sono falsificate dall'esperimento.*

VI.5.5.1 Il teorema e la disuguaglianza di Bell

Bell inizia presentando l'argomento EPR nella versione di Bohm.

Consideriamo una coppia di particelle dotate di spin 1/2 creata in qualche modo nello stato di singoletto [spin totale nullo] ognuna delle quali si muova liberamente in direzioni opposte. Usando apparati di Stern - Gerlach, possiamo effettuare misure di una componente prescelta degli spin $\vec{\sigma}_1 \in \vec{\sigma}_2$. Se la misura della componente $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$, dove \vec{a} è un qualunque vettore unitario [che individua una direzione], fornisce il valore +1, allora secondo la meccanica quantica, la misura di $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{a}$ deve fornire il valore -1 e viceversa. Ora noi facciamo l'ipotesi, e essa appare almeno degna di considerazione, che se le due misure sono fatte in luoghi lontani l'uno dall'altro l'orientazione di un magnete non influenza il risultato ottenuto con l'altro magnete. Siccome possiamo predire anticipatamente il risultato della misura di una qualunque componente di $\vec{\sigma}_2$, dopo aver misurato la stessa componente di $\vec{\sigma}_1$, ne consegue che il risultato di una misura di questo tipo deve in realtà essere predeterminato. Poiché la funzione d'onda quantica iniziale non determina il risultato di una singola misura, questa predeterminazione implica la possibilità di una specificazione più completa dello stato [196, p. 195; corsivo mio].

Per specificare ulteriormente lo stato del sistema, Bell introduce un parametro λ tale che il risultato A della misura della componente dello spin σ_1 della particella 1 lungo la direzione \vec{a} dipenda da \vec{a} e da λ e, analogamente, il risultato B della misura dello spin σ_2 della particella 2 dipenda da \vec{b} e da λ :

$$A(\vec{a},\lambda) = \pm 1, \qquad B(\vec{b},\lambda) = \pm 1 \tag{VI.39}$$

Per la condizione di località, il risultato *B* non dipende dall'orientazione dell'analizzatore che conduce al risultato *A* e viceversa. *Quindi*, se $\rho(\lambda)$ è la distribuzione di probabilità del parametro λ , il valore di aspettazione $E(\vec{a}, \vec{b})$ del prodotto delle componenti $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} \in \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ è dato da ¹⁶:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \qquad (VI.40)$$

Il valore di aspettazione (VI.40) dovrebbe essere uguale a quello calcolato secondo la meccanica quantica: $-\vec{a} \cdot \vec{b} = -\cos(\vec{a}, \vec{b})$. Bell dimostra che se \vec{c} è un altro vettore unitario qualsiasi, vale la disuguaglianza:

$$1 + E(\vec{b}, \vec{c}) \ge \left| E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c}) \right|$$
 (VI.41)

Questa è la disuguaglianza di Bell. Siccome per valori piccoli di $|\vec{b} - \vec{c}|$, il secondo membro della (VI.41) è, *in generale*, dell'ordine di $|\vec{b} - \vec{c}|$, $E(\vec{b}, \vec{c})$ non può essere stazionario al valore minimo –1 (quando $\vec{b} = \vec{c}$), come richiesto dalla meccanica quantica. La conclusione è che, in determinate situazioni, una teoria a variabili nascoste costruita alla Bell, cioè usando i postulati, P1, P2 e P3, conduce a predizioni diverse da quelle della meccanica quantica. È quindi possibile, in linea di principio, verificare sperimentalmente la concordanza o discordanza tra la meccanica quantica e una teoria a variabili nascoste alla Bell.

VI.5.5.2 Generalizzazione del teorema di Bell

Il teorema di Bell è stato generalizzato per un sistema qualunque di due particelle correlate [220]. Inoltre, in questo lavoro, si introduce l'ipotesi che la correlazione tra le misure effettuate sulle due parti del sistema non sia perfetta. Perfetta correlazione significa che per ogni \vec{b} esiste un vettore unitario \vec{b}' (cioè $\vec{b}' = -\vec{b}$) tale per cui $E(\vec{b}', \vec{b}) = 1$. Invece, se si suppone una correlazione imperfetta, cioè tale che $E(\vec{b}', \vec{b}) = 1 - \delta$ con $0 \le \delta \le 1$, si ottiene la disuguaglianza [220, p. 881]:

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| + E(\vec{b}', \vec{b}) + E(\vec{b}', \vec{c}) \le 2$$
(VI.42)

Questa disuguaglianza, che si riduce a quella di Bell nel caso di perfetta correlazione $\begin{bmatrix} \vec{b}' = -\vec{b} \rightarrow E(\vec{b}', \vec{b}) = 1 \text{ e } E(\vec{b}', \vec{c}) = E(-\vec{b}, \vec{c}) = -E(\vec{b}, \vec{c}) \end{bmatrix}$, è denotata con l'acronimo CHSH (Clauser, Horn, Shimony, Holt): essa prevede l'uso di quattro direzioni diverse $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{b}')$ lungo le quali effettuare le misure. Infine, in questo lavoro, si propone di sottoporre a verifica sperimentale la nuova disuguaglianza, usando coppie di fotoni emessi in cascata da atomi di calcio: discuteremo in dettaglio un esperimento di questo tipo nella sezione VI.5.7.

¹⁶Qui, Bell usa l'assunzione P3 di pagina 237.

Recentemente, sono state prese in considerazione modelli di teorie a variabili nascoste non - locali, cioè modelli che non usano la condizione di località [219]. In questi modelli, i risultati delle misure sulle parti separate del sistema dipendono da un ulteriore parametro η dipendente, per esempio, dagli strumenti le cui misure sono separate da una distanza spazio - temporale di tipo spaziale. Anche queste teorie sono sottoposte a disuguaglianze che sono violate dalle predizioni della meccanica quantica, predizioni che sono in accordo con l'esperimento [221].

VI.5.6 Esperimenti sulle disuguaglianze di tipo Bell

Verso la fine degli anni Sessanta del secolo scorso, i tempi erano teoricamente e sperimentalmente maturi per effettuare esperimenti che potessero decidere sulla possibilità di teorie a variabili nascoste. Si trattava di mettere a punto ed eseguire esperimenti il cui esito sarebbe eventualmente consistito nella violazione della disuguaglianza di Bell o della disuguaglianza CHSH. La violazione di una di queste disuguaglianze avrebbe significato che alcune predizioni delle teorie a variabili nascoste erano falsificate dall'esperimento, dimostrando così - in particolare - che la descrizione della meccanica quantica non poteva essere resa 'più completa' introducendo variabili nascoste. Gli esperimenti ideati e realizzati non riguardavano tuttavia particelle massive e i loro spin (che avrebbero richiesto l'uso di apparati poco maneggevoli come gli apparati di Stern - Gerlach) ma coppie di fotoni entangled e la loro polarizzazione, la cui misura avrebbe richiesto solo l'uso di polarizzatori lineari o analizzatori di polarizzazione a due canali. Un analizzatore di polarizzazione a due canali può essere costituito da un cristallo birifrangente o da un dispositivo che trasmette solo fotoni polarizzati lungo una determinata direzione e riflette i fotoni polarizzati nella direzione perpendicolare alla precedente. L'uso di analizzatori a due canali permette di realizzare l'analogo ottico dell'esperimento ideale ipotizzato da Bohm con due particelle massive nello stato di singoletto di spin. Le prime misure di questo tipo sono state eseguite con sorgenti di fotoni eccitate con lampade a spettro continuo (opportunamente filtrato) [222]. Agli inizi degli anni Ottanta l'uso di laser permise di mettere a punto sorgenti di fotoni sufficientemente intense. Descriviamo qui l'esperimento condotto nel 1982 [223], il primo eseguito usando analizzatori a due canali, invece di polarizzatori lineari.

VI.5.7 L'esperimento di Orsay (1982)

La sorgente è costituita da un fascio di atomi di calcio. Transizioni a due fotoni provocate da due fasci laser perpendicolari al fascio di atomi portano elettroni dallo stato fondamentale $4s^2$ (J = 0) allo stato eccitato $4p^2$ (J=0); da qui, gli elettroni ritornano allo stato fondamentale passando per lo stato intermedio $4s4p^1$ (J = 1) emettendo due fotoni corrispondenti a $\lambda_1 = 551.3 nm$ e $\lambda_2 = 422.7 nm$, rispettivamente (figura VI.5) ¹⁷.



Figura VI.5. I livelli energetici del calcio coinvolti nell'emissione di due fotoni in cascata.

Si considerino due fotoni di una coppia emessi da un singolo atomo e propagantesi in direzioni opposte (±*z*) (figura VI.6). Filtri opportuni (non mostrati in figura), fanno sì che lungo la direzione +*z* arrivino sui rivelatori solo i fotoni *v*₁ e sui rivelatori posti sulla direzione –*z* solo i fotoni *v*₂. Su ogni cammino è posto un analizzatore a due canali e, dopo di esso, sono collocati due fotomoltiplicatori in modo tale da raccogliere i fotoni che passano attraverso l'uno o l'altro canale¹⁸. In questo esperimento l'analizzatore a due canali era costituito da un 'cubo polarizzatore' in grado di trasmettere la luce polarizzata nel piano di incidenza (polarizzazione ||) e di riflettere quella polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza ¹⁹. Indichiamo con *A* l'analizzatore posto sul cammino +*z* e con *B* quello collocato sul cammino –*z*. *L'esperimento consiste nell'osservare le correlazioni tra le polarizzazioni dei fotoni gemelli di ciascuna coppia*.

¹⁷In questo esperimento le misure sui fotoni gemelli non sono separate da un intervallo spazio - temporale di tipo spaziale. Il primo esperimento di questo tipo è stato realizzato da [224]

¹⁸Grazie alle caratteristiche fisiche degli analizzatori a due canali, questi sono spazialmente separati.

 $^{^{19}}$ La polarizzazione || è detta p
 (dal tedesco 'parallel', parallelo); la polarizzazione
 \perp è detta s (dal tedesco 'senkrecht', perpendicolare).



Figura VI.6. Schema dell'esperimento EPR di Aspect et al. [223]. Si veda il testo.

I due fotoni gemelli sono prodotti in cascata da un atomo che passa da un livello con J = 0 a un livello intermedio con J = 1 e, infine, ad un livello finale con J = 0. Siccome durante l'emissione di un fotone da parte di un atomo è conservato il momento angolare del sistema costituito dall'atomo emettente e dal fotone emesso, la coppia di fotoni gemelli è descritta dal vettore di stato:

$$|\psi(v_1, v_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|R_1, R_2\rangle + |L_1, L_2\rangle)$$
 (VI.43)

dove (|*R*>, |*L*>) sono stati di polarizzazione circolare, destrorsa e sinistrorsa, rispettivamente. Il vettore di stato (VI.43) descrive una coppia di fotoni *entangled*. Siccome un fotone polarizzato circolarmente può essere descritto come una combinazione di due qualsiasi polarizzazioni lineari tra di loro perpendicolari, la (VI.43) può essere scritta nella forma:

$$|\psi(v_1, v_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\|_1, \|_2 \rangle + |\perp_1, \perp_2 \rangle)$$
 (VI.44)

dove ($|||>, |\perp>$) rappresentano le due polarizzazioni lineari dell'analizzatore a due canali.

Siano $\mathbf{a} \in \mathbf{b}$ le due direzioni che individuano in modo univoco l'orientazione dei due analizzatori: chiamiano $\mathbf{a} \in \mathbf{b}$ 'assi' dei due analizzatori. Il vettore di stato che descrive i due fotoni gemelli, implica, indicando con *P* le probabilità, che:

$$P_{\parallel}(\mathbf{a}) = P_{\perp}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}$$

$$P_{\parallel}(\mathbf{b}) = P_{\perp}(\mathbf{b}) = \frac{1}{2}$$
(VI.45)

cioè che la probabilità che il fotone percorra il canale (\parallel) o il canale (\perp) di un analizzatore è la stessa ed uguale a 1/2. Inoltre, per quanto riguarda le

probabilità congiunte, si ha:

$$P_{\parallel\parallel}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{\perp\perp}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$
(VI.46)

$$P_{\parallel\perp}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{\perp\parallel}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$
(VI.47)

Consideriamo dapprima il caso in cui gli assi dei due analizzatori siano paralleli. Allora, in base alla (VI.46) risulta che se il fotone v_1 ha percorso il canale $\parallel (\perp)$ troveremo, con certezza, che anche il fotone v_2 avrà percorso lo stesso canale: c'è perfetta correlazione tra le polarizzazioni dei due fotoni gemelli.

Nel caso più generale, è opportuno descrivere il grado di correlazione mediante il *coefficiente di correlazione* dato da:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{\parallel\parallel}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{\perp\perp}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{\parallel\perp}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{\perp\parallel}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (VI.48)$$

Il coefficiente di correlazione è uguale (+1) se gli assi dei due analizzatori sono paralleli; è invece uguale a (-1) se gli assi sono tra loro perpendicolari. Nel caso di questo esperimento, la disuguaglianza di CHSH (VI.42) assume la forma:

$$-2 \le S \le 2 \tag{VI.49}$$

con

$$S = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{b}, \mathbf{a}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$$
(VI.50)

dove gli *E* sono i coefficienti di correlazione relativi alle coppie di orientazioni dei due analizzatori *A* e *B*. Si tratta allora di scrivere l'espressione della funzione *S* prevista dalla meccanica quantica e trovare le eventuali condizioni che rendono massima la violazione della disuguaglianza (VI.49). Si ha:

$$S_{QM} = \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + \cos 2(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + \cos 2(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$$
(VI.51)

Supponiamo che le direzioni scelte per i due analizzatori $A \in B$ giacciano in un piano, come indicato nella figura VI.7.

Ne segue che: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}') = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}') + (\mathbf{a}', \mathbf{b}')$. Per trovare gli estremi della funzione S_{QM} , dobbiamo porre uguali a zero le tre derivate parziali di S_{QM} rispetto ai tre angoli indipendenti. Otteniamo così che i tre angoli indipendenti debbono essere uguali. Quindi, posto:

$$(a, b) = (b, a') = (a', b') = \theta$$
 (VI.52)



Figura VI.7. In questa figura sono mostrate possibili orientazioni degli assi dei due analizzatori di polarizzazione a due canali.

 $con \theta$ arbitrario, la (VI.51) assume l'espressione:

$$S_{OM} = 3\cos 2\theta - \cos 6\theta \tag{VI.53}$$



Figura VI.8. Grafico della funzione $S_{QM} = 3\cos 2\theta - \cos 6\theta$ dove θ è l'angolo tra gli assi dei due analizzatori di polarizzazione. Nelle teorie a variabili nascoste i valori della funzione *S* devono essere compresi nell'intervallo -2 + 2.

e il suo grafico è mostrato nella figura VI.8. L'intervallo dei valori di S_{QM} compreso tra -2 e +2 è quello in cui le predizioni della meccanica quantica e quelle di una teoria a variabili nascoste obbediscono entrambe alle disuguaglianze CHSH: in questo intervallo non è quindi possibile discriminare tra le due teorie. Al di fuori di questo intervallo, le predizioni della meccanica quantica violano le disuguaglianze CHSH. La massima violazione si ottiene in corrispondenza dei valori estremi di S_{QM} :

$$2\sqrt{2} = 2.8284$$
 per $\theta = \pm 22.5$ (VI.54)
 $-2\sqrt{2} = -2.8284$ per $\theta = \pm 67.5$

Il valore sperimentale ottenuto da Aspect et al. è stato $S_{QM} = 2.697 \pm 0.015$ in ragionevole accordo con le predizioni teoriche della meccanica quantica [220, p. 93]. Si è quindi verificata una netta violazione della disuguaglianza CHSH, dimostrando così che le teorie a variabili nascoste non riescono a riprodurre tutte le predizioni, verificate sperimentalmente, della meccanica quantica. L'esperimento di Orsay è stato seguito da molti altri tesi a superare, tra l'altro, le criticità connesse ai limiti operativi dei fotomoltiplicatori (detector loophole), alla necessità di correlare eventi la cui distanza spazio - temporale sia di tipo spaziale (communication loophole) ed a quella di stabilire quali eventi siano da attribuire ad una singola coppia di particelle (coincidence loophole). Il lettore interessato a questi sviluppi può consultare [214] e l'ampia bibliografia ivi contenuta.

VI.5.8 Interpretazione dell'esperimento di Orsay

La descrizione usuale dell'esperimento di Orsay è efficacemente illustrata da Aspect, uno dei suoi realizzatori [225]. Supponiamo che la misura del fotone v_1 sia effettuata prima della misura del fotone v_2 . Se la coppia di fotoni è descritta dalla (VI.44), allora la probabilità che il fotone v_1 percorra uno dei due canali dell'analizzatore A è pari a (1/2); se **a** è la direzione della polarizzazione del fotone v_1 dopo la misura, allora la coppia di fotoni, dopo la misura effettuata da A, è descritta dal vettore di stato (riduzione del vettore di stato):

$$|\psi'(v_1, v_2) \rangle = |\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle \tag{VI.55}$$

Questa equazione ci informa che le polarizzazioni dei due fotoni sono correlate: dopo la misura del fotone v_1 i due fotoni hanno la stessa polarizzazione **a**. Pertanto, se l'analizzatore *B* è orientato come *A*, il fotone v_2 imboccherà con certezza lo stesso canale imboccato da v_1 ; se, invece, *B* è ruotato di un angolo θ rispetto ad *A*, il fotone v_2 percorrerà lo stesso canale percorso da v_1 con probabilità $\cos^2 \theta$ (legge di Malus). Pertanto, la probabilità che v_1 e v_2 percorrano lo stesso canale e, quindi, abbiano, dopo la misura, la stessa polarizzazione, è data da

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\cos^2\theta \qquad (\text{VI.56})$$

Questa equazione, coincide con la (VI.46), che è ricavata direttamente dal vettore di stato (VI.44). Si osservi come nella descrizione che parte dall'equazione (VI.43) e giunge all'equazione (VI.56) si parli solo di vettori di stato e di predizioni (esiti di misure), come prescrive la meccanica quantica. Tuttavia, la descrizione usuale, chiaramente illustrata da Aspect, specifica che: Giuseppe Giuliani - Elettromagnetismo relatività quanti

- A) Prima della misura, i fotoni non hanno una polarizzazione definita (ipotesi GFND = Grandezza Fisica Non Definita).
- B) Quando viene effettuata la misura sul fotone v_1 , il fotone v_2 *assume*, istantaneamente, la stessa polarizzazione del fotone v_1 .

Questa descrizione è esposta alle seguenti osservazioni:

- 1. Diversamente da un'onda, che può anche essere non polarizzata, i fotoni emessi da un atomo hanno sempre una polarizzazione definita.
- 2. L'ipotesi GFND è in contrasto con la conservazione del momento angolare durante il processo di emissione di un fotone da parte di un atomo.
- 3. L'ipotesi GFND non è usata nella catena deduttiva che conduce alle predizioni verificate sperimentalmente, ma solo a posteriori per descrivere i risultati sperimentali. Quindi, essa può essere eliminata senza diminuire la capacità predittiva della teoria.
- 4. L'ipotesi GFND potrebbe essere falsificata da un esperimento che, come indicato dall'ottica classica, permette di stabilire quale è la polarizzazione della luce (di un fotone) *prima della misura*: si veda la sezione VI.5.9.
- 5. L'asserzione B) implica una azione a distanza istantanea. Questa azione a distanza istantanea è chiamata 'non - località'.
- 6. Questa descrizione esclude la possibilità di una misura simultanea da parte di *A* e di *B* i cui assi siano paralleli. Supponiamo infatti che i due fotoni v_1 e v_2 arrivino, nel sistema di riferimento del laboratorio, allo stesso istante, rispettivamente in *A* e in *B*. Supponiamo che v_1 imbocchi il canale ||; allora, simultaneamente, v_2 dovrebbe imboccare lo stesso canale e assumere la stessa polarizzazione. D'altra parte, siccome *B* sta misurando la polarizzazione di v_2 nello stesso istante in cui *A* sta misurando la polarizzazione di v_1 potrebbe accadere che v_2 imbocchi il canale \perp . Contemporaneamente, v_1 dovrebbe imboccare lo stesso canale e assumere la stessa polarizzazione, in contrasto con la premessa.

VI.5.9 Misura della polarizzazione dei fotoni

Abbiamo visto che l'esperimento di Orsay è interpretato supponendo che, prima della misura, i fotoni gemelli di ogni coppia prodotta dalla sorgente non abbiano una polarizzazione definita (ipotesi GFND). Questa ipotesi potrebbe essere falsificata dal seguente esperimento che prevede una modifica dell'apparato sperimentale originale. Si tratta di inserire sulle direzioni $\pm z$ una lamina a quarto d'onda prima dell'analizzatore di polarizzazione a due canali. Se i fotoni di ogni coppia sono polarizzati circolarmente *R* o *L*, essi, dopo la lamina a quarto d'onda, sono polarizzati linearmente lungo la direzione che forma un angolo $\theta_R = \pi/4$ o un angolo $\theta_L = -\pi/4$, rispettivamente, con l'asse ottico della lamina (si veda l'appendice D.2). Pertanto, se gli analizzatori a due canali sono disposti in modo tale lasciar passare i fotoni polarizzati lungo θ_R e di riflettere a 90 gradi quelli polarizzati lungo θ_L , i due rivelatori collocati per raccogliere i fotoni trasmessi (originariamente *R*) saranno attivati in correlazione perfetta. Lo stesso vale per i rivelatori disposti per raccogliere i fotoni riflessi (originariamente *L*).

Se una misura di questo tipo confermasse che i fotoni di ogni coppia – prima della misura – sono polarizzati R o L, sarebbe falsificata l'ipotesi GFND.

Questa ipotesi e quella della non - località sono strettamente connesse. Innanzitutto, la non - località è invocata per spiegare la correlazione osservata tra le polarizzazioni dei due fotoni gemelli, dopo che si è assunto che questi non hanno una polarizzazione definita prima della misura. In secondo luogo, l'esperimento ideato per verificare l'ipotesi GFND può essere usato, con opportune modifiche, anche per verificare la non - località. Allo scopo, è necessario inserire nell'apparato di Orsay, al posto dei due analizzatori a due canali, una lamina a quarto d'onda e un polarizzatore lineare disposti in modo tale che i loro assi ottici formino un angolo pari a, per esempio, $\pi/4$. La misura del fotone v_1 è fatta prima di quella del fotone v_2 ; si suppone inoltre che le due misure siano separate da un intervallo spazio temporale di tipo spaziale ($l > c\Delta t$). Se il fotone v_1 attraversa il polarizzatore lineare significa che esso, dopo la misura, è polarizzato lungo l'asse ottico del polarizzatore: indichiamo questa direzione con il simbolo ||. Secondo la non - località, il fotone v_2 assume istantaneamente la stessa polarizzazione lineare ||. Ne consegue che, attraversando la lamina a quarto d'onda, v_2 si trasforma in un fotone polarizzato circolarmente e, pertanto, avrà probabilità 1/2 di attraversare il successivo polarizzatore lineare. È immediato verificare che se i fotoni gemelli sono invece prodotti dalla sorgente come fotoni polarizzati *R*, entrambi hanno probabilità pari ad uno di attraversare il relativo analizzatore costituito dalla lamina e dal polarizzatore lineare.

VI.6 Meccanica quantica e filosofia

L'argomentazione EPR è nata all'interno di un clima di vivace discussione, di natura epistemologica e filosofica riguardante la meccanica quantica, che ha caratterizzato gli anni Venti e Trenta del secolo scorso. Einstein, Bohr e Born sono stati tra i protagonisti di questo dibattito [226], più volte ripercorso dagli storici della fisica. Dopo il lavoro di Bell [196], che non faceva alcun riferimento esplicito all'intreccio tra fisica e filosofia che aveva caratterizzato il dibattito precedente, la letteratura sulle disuguaglianze alla Bell è stata caratterizzata dal riemergere dell'ipotesi che 'prima della misura una grandezza fisica non ha un valore definito' (ipotesi GFND) e della assunzione associata secondo cui supporre che prima della misura una grandezza fisica abbia un valore definito sia una posizione filosofica 'realista' e non prioritariamente - una questione di natura fisica da decidere mediante un esperimento. Ciò ha comportato che le 'teorie locali a variabili nascoste' alla Bell si siano trasformate in 'teorie realiste locali a variabili nascoste'. Di conseguenza, le violazioni sperimentali delle disuguaglianze di tipo Bell si sono trasformate - con un salto logico - anche nella 'falsificazione del realismo'. Ecco alcuni esempi:

- La violazione di una disuguaglianza di Bell è un'osservazione sperimentale che impone l'abbandono di un punto di vista *realista e locale*
 cioè di un punto di vista secondo cui le proprietà fisiche sono definite (probabilisticamente) prima e indipendentemente dalla misura

 e secondo cui nessuna influenza fisica può propagarsi con velocità superiore a quella della luce [227, p. 227; corsivo mio].
- 2. Molti scienziati attivi adottano il 'realismo' un punto di vista secondo cui esiste una realtà esterna indipendente dall'osservazione. Ma la fisica quantica ha frantumato alcune delle nostre credenze fondamentali. Secondo il teorema di Bell, ogni teoria basata sull'assunzione congiunta del *realismo e della località* (che significa che eventi locali non possono essere influenzati da azioni in regioni separate da intervalli spazio - temporali di tipo spaziale) è in contrasto con alcune predizioni quantiche. Esperimenti con coppie di particelle 'entangled' hanno ampiamente confermato queste predizioni quantiche, rendendo così insostenibili le *teorie realiste locali* [221, p. 871; corsivi miei].

3. Il teorema di Bell non dimostra la validità della meccanica quantica, ma ci permette di verificare l'ipotesi che la natura sia governata da un *realismo locale*. Il principio del realismo afferma che ogni sistema [fisico] possiede valori preesistenti per ogni possibile misura effettuata sul sistema. Nelle teorie realiste locali, questi valori preesistenti dipendono solo da eventi collocati nel cono di luce del passato del sistema [fisico] [p. 250402 - 2][228].

Come si vede da queste citazioni, il realismo che sarebbe posto in discussione o addirittura falsificato è inteso in accezioni assai diverse. Secondo [227] e [228], il realismo consiste nell'asserzione che le grandezze fisiche hanno un valore definito prima della misura. La posizione di [221] è invece assai più radicale perché il realismo posto in discussione o falsificato è quello secondo cui «esiste una realtà esterna indipendente dall'osservazione».

Una concezione filosofica può orientare lo scienziato nella elaborazione di teorie o nella ideazione ed esecuzione di un esperimento. Tuttavia, il fatto che una teoria, ispirata da una filosofia, sia falsificata da un esperimento non implica che sia falsificata la filosofia che ha ispirato la teoria, a meno che tutti i postulati della teoria siano una conseguenza logica della concezione filosofica. Nella storia della fisica (e della Scienza) non c'è, a mia conoscenza, alcun esempio di questo tipo e, ragionevolmente, mai ci sarà.

Il realismo temperato, illustrato nell'Introduzione di questo volume, guarda agli esperimenti EPR nel modo seguente. Se le predizioni della meccanica quantica sono corroborate dall'esperimento vuol dire che la descrizione del sistema fisico in esame data dalla funzione di stato produce predizioni (probabilistiche) corrette: la funzione di stato descrive correttamente (anche se solo probabilisticamente) le proprietà del sistema fisico. Negli esperimenti EPR, queste proprietà consistono - tra l'altro - in una correlazione tra i risultati di alcune misure effettuate sulle due parti separate del sistema fisico (per esempio due fotoni), correlazione correttamente descritta dalla funzione di stato. Il realismo temperato induce a ritenere che questa correlazione sia una proprietà della coppia di fotoni prodotta dalla sorgente, proprietà probabilisticamente descritta dalla funzione di stato e non il risultato di una azione a distanza istantanea che viola il principio di località della relatività speciale. D'altra parte, l'idea di sovrapporre alla teoria quantica parametri aggiuntivi (variabili nascoste) è, a priori, epistemologicamente assai discutibile (sezione VI.5.3).

Il realismo temperato suggerisce che la carica dell'elettrone abbia un valore definito prima della misura. Lo stesso vale anche per le altre proprietà dell'elettrone: massa, momento angolare intrinseco (spin) e momento magnetico intrinseco. Il realismo temperato ritiene cioè che, sulla base della conoscenza attualmente considerata come acquisita, l'elettrone sia verosimilmente un oggetto del Mondo, dotato delle proprietà descritte dalle grandezze fisiche ad esso associate. Immagino che nessun fisico pensi che la carica dell'elettrone assuma il suo valore solo durante un processo di misura. Se lo pensasse, dovrebbe spiegare come mai in tutte le misure di grandezze fisiche in cui compare la carica dell'elettrone *e*, il valore di *e*, misurato o supposto, sia sempre lo stesso, indipendente dal contesto sperimentale. Dovrebbe cioè spiegare, per esempio, perché il valore di e misurato da Millikan con il sistema delle gocce d'olio, fu adoperato da Millikan per misurare il valore della costante *h* studiando l'effetto fotoelettrico. Oppure perché, misurando il rapporto *e*/*m* mediante un campo magnetico si possa ricavare tranquillamente *m* attribuendo all'elettrone il valore noto di *e*. Oppure dovrebbe spiegare come mai i livelli dell'elettrone dell'atomo di idrogeno siano calcolati inserendo nella formula il valore noto di e. Dovrebbe cioè spiegare perché in ogni situazione fisica nota, l'elettrone si comporta come se fosse dotato sempre della stessa carica, indipendente dal tipo di misura effettuata o non effettuata. Queste riflessioni ci inducono a concludere che qualunque fisico non possa non essere, di fatto, un realista temperato, se non altro per ragioni di economia intellettuale o di convenienza pratica. L'idea che una grandezza fisica non abbia un valore definito prima della misura appare dunque veramente singolare. Si dovrebbe, in ogni caso, specificare che l'ipotesi GFND è applicabile solo in alcune situazioni che costituiscono delle eccezioni. Un'eccezione, potrebbe essere quella rappresentata da stati entangled, descriventi, per esempio, coppie di fotoni come quelle usate nell'esperimento di Orsay o in esperimenti simili. Abbiamo però visto che, in questo caso, l'ipotesi GFND non è necessaria per la deduzione delle predizioni relative alla correlazione tra le misure effettuate sui due fotoni separati delle coppie. Abbiamo inoltre mostrato come, nell'esperimento di Orsay, l'ipotesi che i fotoni delle coppie abbiano una polarizzazione definita prima della misura possa essere sottoposta a verifica sperimentale: quindi, per quanto ispirata da una concezione filosofica, essa rimane una questione fisica decidibile con un esperimento. Dovrebbe allora apparire evidente come le affermazioni secondo cui i risultati degli esperimenti EPR costringono all'abbandono del realismo siano senza fondamento.

VI.7 La meccanica quantica non ha bisogno di 'interpretazioni'

La citazione posta all'inizio di questo capitolo richiede qualche chiarimento. Scrivono Fuchs e Peres:

Il filo comune a tutte le "interpretazioni" non convenzionali (standard) è il desiderio di creare una nuova teoria con caratteristiche che corrispondano a qualche realtà indipendente dai nostri esperimenti potenziali. Ma il tentativo di appagare una immagine del Mondo classica gravando la meccanica quantica con variabili nascoste, molti mondi, regole di consistenza, o collassi spontanei [della funzione d'onda], senza alcun incremento della sua capacità predittiva, dà soltanto l'illusione di una migliore comprensione. *Contrariamente a questi desideri, la teoria quantica non descrive la realtà fisica.* Quello che fa è fornire un algoritmo per calcolare la probabilità di eventi macroscopici ("clicks dei rivelatori") che sono la conseguenza dei nostri interventi sperimentali. Questa scarna definizione dello scopo della teoria quantica è la sola interpretazione di cui abbiano bisogno gli sperimentatori o i teorici [195, p. 70; corsivo mio].

Al lettore non sfuggirà come queste affemazioni siano in sintonia con quanto sostenuto in questo volume. Permane, comunque, una domanda. Come è potuto accadere? Come è potuto accadere che tante energie intellettuali siano state e siano ancora dedicate alle "interpretazioni" della meccanica quantica? Certamente ha influito un improprio intreccio tra fisica e filosofia che, sin dall'inizio ha caratterizzato la discussione sulla meccanica quantica. Ma, alla base, sta verosimilmente il fatto che la meccanica quantica è stata il prodotto di un lungo e tormentato percorso teso a padroneggiare il comportamento della struttura discreta della materia e della luce, emersa agli inizi del Novecento. L'esito di questo percorso è stata la messa a punto di un algoritmo che permetteva, sebbene solo in termini di probabilità, di descrivere il mondo atomico e sub - atomico e predirne, con successo, il comportamento. È stata una novità sconvolgente perché a teorie 'classiche' dedicate a dominî specifici (meccanica, termodinamica, elettromagnetismo) in cui comparivano entità teoriche e grandezze fisiche veniva affiancato un algoritmo applicabile in linea di principio a qualunque sistema fisico. Questo algoritmo costituiva una proto - teoria che assumeva caratteristiche simili a quelle delle teorie classiche solo applicandola ad un sistema físico specifico. La natura delle teorie classiche era tale da permettere quello che potremmo chiamare un realismo ingenuo: le teorie descrivono, con maggiore o minore verosimiglianza, come si svolgono le cose nel Mondo. La comparsa del nuovo algoritmo non ha sostanzialmente mutato la situazione. Il realismo ingenuo, che nella sua elaborazione più raffinata assume le connotazioni del cosiddetto 'realismo delle teorie', non ha risparmiato neppure la meccanica quantica. Abbiamo così visto interpretazioni realiste della funzione di stato, degli stati di sovrapposizione (sezione VI.3) e la descrizione degli esperimenti EPR basata sull'ipotesi che prima della misura i fotoni gemelli non hanno una polarizzazione definita (ipotesi GFND) e su quella di una azione a distanza istantanea chiamata, forse per pudore, non - località (sezione VI.5.8). Tuttavia, l'aspetto più sorprendente riguarda la coesistenza di questo realismo ingenuo con la critica del realismo tout court, cioè del realismo senza alcuna declinazione.

La meccanica quantica non ha quindi bisogna di alcuna 'interpretazione' tra quelle elencate da Fuchs e Peres o di qualche altra di là da venire. Se applicato ad un sistema fisico specifico, il formalismo quantico assume le caratteristiche epistemologiche delle teorie classiche, con la sola differenza che, in generale, le predizioni riguardanti l'esito di una misura sono espresse in termini di probabilità. Al formalismo quantico applicato ad un sistema fisico specifico si possono quindi applicare, come mostrato nel capitolo I le riflessioni ed i criteri epistemologici sviluppati per le teorie classiche.

Appendice A

Esperimenti ideali con lampi di luce

A.1 Dilatazione del tempo



Figura A.1. Scambio di segnali luminosi tra due SRI. *O* lancia verso *O'* due lampi di durata idealmente nulla; *O'* riceve e riflette il primo lampo alla distanza d_1 e all'istante t_1^R , il secondo lampo alla distanza d_2 e all'istante t_2^R . Si veda il testo.

In questa appendice mostriamo come sia possibile ricavare la formula della dilatazione del tempo sulla base di esperimenti ideali con lampi di luce di durata idealmente nulla. I postulati necessari sono quelli usati da Einstein nel lavoro sulla relatività speciale (pagina 30).

I due sistemi di riferimento inerziali $K \in K'$ sono in moto relativo uniforme di allontanamento lungo la direzione $x \equiv x'$ con velocità V. Siano Oed O' le origini di $K \in K'$. O ed O' sono dotati di un orologio *ideale* (pagina 29) solidale con uno specchio: non è necessario che i due orologi siano sincronizzati.

O lancia verso *O'* lampi di luce di durata idealmente nulla all'istante t_1 e all'istante $t_2 = t_1 + T$. *O'* riceverà i due lampi agli istanti t'_1 e $t'_2 = t'_1 + T'$ e, istantaneamente, li rifletterà verso *O*. Per l'omogeneità della variabile

Appendice A - Esperimenti ideali con lampi di luce

tempo, il valore di T' non può dipendere dall'istante t_1 ; per l'omogeneità dello spazio, T' non può dipendere dalla distanza alla quale si trovano O e O' quando O lancia il primo lampo verso O'. Sarà quindi T' = kT, dove k > 0 è un parametro da determinare: k deve essere positivo; altrimenti O' riceverebbe il secondo lampo prima del primo. Indicati con t_1^* e t_2^* gli istanti in corrispondenza dei quali O riceve i due lampi riflessi da O' sarà, per l'isotropia dello spazio e il principio di invarianza ¹:

$$t_2^* - t_1^* = kT' = k^2T \tag{A.1}$$

Indichiamo con d_1 e d_2 le distanze alle quali, secondo *O*, *O*' riceve e riflette il primo ed il secondo lampo, rispettivamente (figura A.1). Sarà:

$$2d_1 = c(t_1^* - t_1);$$
 $2d_2 = c(t_2^* - t_2)$

Per cui:

$$(d_2 - d_1) = \frac{c}{2} [(t_2^* - t_1^*) - (t_2 - t_1)] = \frac{c}{2} (k^2 T - T) = \frac{cT}{2} (k^2 - 1)$$
(A.2)

Inoltre, se t_1^R e t_2^R sono gli istanti in corrispondenza dei quali il primo ed il secondo lampo sono riflessi da O', si avrà:

$$t_1^R = t_1 + \frac{d_1}{c}; \qquad t_2^R = t_1 + T + \frac{d_2}{c}$$
 (A.3)

Ricavando da queste equazioni $(d_2 - d_1)$ e tenendo conto che:

$$t_2^R - t_1^R = \frac{d_2 - d_1}{V}$$

si ottiene:

$$d_2 - d_1 = \frac{VT}{1 - B};$$
 $\cos B = \frac{V}{c}$ (A.4)

Eguagliando i secondi membri della (A.2) e della (A.4) si ottiene infine:

$$k^2 = \frac{1+B}{1-B}$$

Cioè, essendo k > 0:

$$k = \sqrt{\frac{1+B}{1-B}} \tag{A.5}$$

¹Qui, l'isotropia dello spazio implica che la velocità di propagazione della luce nelle due direzioni sia la stessa.

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$\frac{k^2 + 1}{2k} = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}} = \Gamma$$

$$\frac{k^2 - 1}{2k} = \Gamma B$$
(A.6)

Consideriamo ora il fenomeno i cui eventi iniziale e finale siano costituiti dalla ricezione e riflessione, da parte di O', del primo e del secondo lampo. La durata di questo fenomeno è, secondo O, data da (si usano la (A.3) e la (A.4)):

$$\Delta t = t_2^R - t_1^R = \frac{T}{1 - B}$$
(A.7)

La durata dello stesso fenomeno, secondo O', è invece:

$$\Delta t' = T' = kT \tag{A.8}$$

Ne segue che:

$$\Delta t = \Gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{A.9}$$

dove:

- ♦ $\Delta t'$ è l'intervallo di tempo secondo O' che separa due eventi (l'arrivo del primo e del secondo lampo) che avvengono nello stesso punto del suo sistema di riferimento (K') e, quindi, la durata del fenomeno individuato da questi due eventi. La durata di un fenomeno misurata da un orologio collocato 'nel punto' in cui il fenomeno si sviluppa si chiama durata *propria*. La (A.9) mostra che la durata propria di un fenomeno è quella minima.
- ♦ Δt rappresenta l'intervallo di tempo secondo O tra gli stessi due eventi che avvengono in due punti distinti del suo sistema di riferimento (K). Δt è quindi la durata dello stesso fenomeno secondo O.

La (A.9) è l'equazione della 'dilatazione del tempo'. Questa denominazione descrive il fatto che la durata di un fenomeno in un SRI appare dilatata (più lunga) di quella propria, cioè di quella misurata nel SRI in cui il fenomeno si sviluppa nello stesso punto in cui si trova l'orologio.

A.2 Effetto Doppler

Usando l'espressione (A.5) trovata per il coefficiente k nel caso in cui i due sistemi di riferimento si stanno allontanando, si ottiene:

$$T' = T\sqrt{\frac{1+B}{1-B}} \tag{A.10}$$

cioè:

$$T' = T \frac{1 + V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
(A.11)

T e T' rappresentano, rispettivamente, l'intervallo di tempo (misurato da O) tra la partenza del primo e del secondo lampo e l'intervallo di tempo (misurato da O') tra la ricezione del primo e del secondo lampo. Se O invia lampi di luce ad intervalli regolari T, O' li riceve ad intervalli regolari T': T è allora il periodo del 'segnale' costituito dall'insieme dei lampi di luce inviati da O e T' è il periodo del 'segnale' costituito dall'insieme dei lampi di luce ricevuti da O'. La (A.11) è la formula dell'effetto Doppler, relativo alla propagazione della luce nel vuoto lungo la direzione del moto relativo dei due osservatori. La (A.11), scritta in termini di frequenze, diventa:

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V/c} \tag{A.12}$$

La frequenza di un segnale luminoso periodico diminuisce se la sorgente e l'osservatore si allontanano. Le formule (A.11), (A.12) e (A.17) valgono anche per un'onda elettromagnetica: in questo caso è sufficiente considerare come 'segnale' l'insieme dei valori massimi del campo elettrico o di qualunque altra grandezza ad esso correlata.

Nel caso in cui i due osservatori O ed O' siano in moto relativo uniforme di avvicinamento, la (A.2) e la (A.3) rimangono invariate, mentre la (A.4) diventa:

$$d_2 - d_1 = -\frac{VT}{1+B}; \qquad V > 0$$
 (A.13)

Il coefficiente k assume l'espressione:

$$k = \sqrt{\frac{1-B}{1+B}} \tag{A.14}$$

e le (A.6):

$$\frac{k^2 + 1}{2k} = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}} = \Gamma$$

$$\frac{k^2 - 1}{2k} = -\Gamma B$$
(A.15)

La formula della dilatazione del tempo rimane, naturalmente, invariata, mentre quella dell'effetto Doppler assume la forma:

$$T' = T\sqrt{\frac{1-B}{1+B}} = T\frac{1-V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$
(A.16)

Oppure, in termini di frequenze:

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V/c} \tag{A.17}$$

Quindi: le equazioni relative al moto di avvicinamento si ottengono da quelle relative al moto di allontanamento ponendo -V al posto di V.

Si noti infine che se fosse O' ad effettuare l'esperimento ideale, i risultati ottenuti sarebbero gli stessi, come richiesto dal principio di relatività. Dal punto di vista di O', se O si allontana lungo la direzione negativa del comune asse $x \equiv x'$ con velocità V, si tratta di ruotare di π la figura A.1 e sostituire in essa i simboli accentati con quelli non accentati (e viceversa) ²: i calcoli e i risultati sarebbero evidentemente gli stessi. Ciò significa che, dati due osservatori in moto relativo inerziale, se ognuno di essi invia verso l'altro segnali di luce di durata idealmente nulla ad intervalli di tempo regolari T, l'altro osservatore li riceverebbe ad intervalli di tempo T', con T' dato da:

$$T' = T \frac{1 \pm V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
(A.18)

dove il segno (+) vale nel caso di allontanamento ed il segno (-) nel caso di avvicinamento. In altri termini: non è possibile stabilire quale dei due osservatori sia in moto effettuando misure di effetto Doppler.

²Questa rotazione è permessa dall'isotropia e omogeneità dello spazio.

A.3 Contrazione delle lunghezze

Se la velocità della luce nel vuoto è nota, possiamo misurare la distanza tra due punti $A \in B$ usando un orologio posto in $A \in$ uno specchio posto in B; la funzione di questo specchio è quella di riflettere istantaneamente il lampo di luce di durata nulla proveniente da A. Allora, la distanza l_0 tra $A \in B$ è data semplicemente da:

$$l_0 = \frac{1}{2}c\Delta t \tag{A.19}$$

dove Δt è l'intervallo di tempo, misurato dall'orologio poso in A, tra la partenza del lampo e il suo ritorno. Naturalmente, abbiamo usato implicitamente il postulato dell'isotropia dello spazio per cui la velocità della luce è la stessa nel viaggio di andata e di ritorno.

È interessante vedere come si possa applicare la stessa procedura per misurare la lunghezza di una piattaforma in moto. Si consideri la disposizione della figura A.2.



Figura A.2. L'orologio O' e la piattaforma *OB* sono in moto relativo rettilineo uniforme di avvicinamento.

Mediante un procedimento che illustreremo tra poco, O' è in grado di misurare sia la velocità V della piattaforma OB sia la sua lunghezza l'. Si tenga a mente che O' vede la piattaforma in moto di avvicinamento. L'orologio O', quando incontra O all'istante t'_0 , invia verso B un lampo di luce (di durata idealmente nulla): questo viene riflesso da B e ritorna in O' all'istante t'_1 ; viene riflesso da O', raggiunge B, viene riflesso e ritorna in O' all'istante t'_2 . La distanza d' alla quale, secondo O', B riceve e riflette il primo lampo è data da:

$$d' = \frac{c}{2}(t'_1 - t'_0) \tag{A.20}$$

D'altra parte, se $t'_R = t'_0 + (t'_1 - t'_0)/2$ è l'istante di tempo in cui *B* riflette il primo lampo, *d'* può essere scritta sotto la forma:

$$d' = l' - V(t'_R - t'_0) = l' - \frac{V}{2}(t'_1 - t'_0)$$
(A.21)

Uguagliando il secondo membro della (A.20) al terzo membro della (A.21), si ottiene:

$$t_1' - t_0' = \frac{2l'}{c+V} \tag{A.22}$$

260

Procedendo in modo analogo si ottiene:

$$t_2' - t_1' = \frac{2[l' - V(t_1' - t_0')]}{c + V}$$
(A.23)

e quindi, tenendo conto della (A.22):

$$t_2' - t_1' = 2l' \frac{c - V}{(c + V)^2} \tag{A.24}$$

Posto:

$$t'_1 - t'_0 = \alpha$$

 $t'_2 - t'_1 = \beta$

$$2l' = \alpha(c+V) \tag{A.25}$$

e dalla (A.24):

si ottiene dalla (A.22):

$$2l' = \beta \frac{(c+V)^2}{c-V}$$
(A.26)

Uguagliando i secondi membri di queste due equazioni e ricavando *V*, si ottiene:

$$V = c \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = c \frac{(t_1' - t_0') - (t_2' - t_1')}{t_2' - t_0'}$$
(A.27)

Sostituendo il valore così ottenuto per V nella (A.25) si ottiene:

$$l' = c \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} = c \frac{(t_1' - t_0')^2}{t_2' - t_0'}$$
(A.28)

O' può pertanto ricavare il valore di V e di l' eseguendo tre letture di tempo: t'_0, t'_1, t'_2 .

Ci chiediamo ora come le misure eseguite da *O*' siano descritte da *O*. Per il principio di relatività, le misure svolte da *O*' sono descritte da *O* mediante le equazioni (A.22, A.24) in cui le grandezze accentate sono sostituite da quelle non accentate:

$$t_1 - t_0 = \frac{2l_0}{c+V};$$
 $t_2 - t_1 = 2l_0 \frac{c-V}{(c+V)^2}$ (A.29)

dove l_0 è la lunghezza propria della piattaforma; e, quindi, l'equazione (A.28) è sostituita dalla analoga equazione:

$$l_0 = c \, \frac{(t_1 - t_0)^2}{t_2 - t_0} \tag{A.30}$$

Mentre le misure sono eseguite da O' nello stesso punto O' del suo sistema di riferimento, O vede le misure eseguite da O' in punti diversi del suo sistema di riferimento. Pertanto, la relazione tra le durate dello stesso fenomeno, valutate nei due sistemi di riferimento, è data da $\Delta t' = \Delta t/\Gamma$. Di conseguenza, dalle equazioni (A.28) e (A.30) si ricava immediatamente che:

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$
(A.31)

Questa è l'equazione della 'contrazione delle lunghezze'.

Naturalmente, le (A.29) si possono ottenere partendo dalle equazioni costitutive:

$$c(t_1 - t_0) = 2l_0 - V(t_1 - t_0) \tag{A.32}$$

$$c(t_2 - t_1) = 2l_0 - 2V(t_1 - t_0) - V(t_2 - t_1)$$
(A.33)

Questa derivazione della 'contrazione delle lunghezze' ha il pregio di basarsi su una estensione della procedura usata per misurare la distanza propria tra due punti tra loro in quiete (equazione (A.19)). Il risultato ottenuto vale anche nel caso in cui ci siano solo l'orologio O' e lo specchio B. In questa configurazione, la distanza l' misurata – data dall'equazione (A.28) – è quella alla quale si trova lo specchio quando O' lancia il primo lampo. Si osservi infine che si giunge allo stesso risultato anche nel caso in cui O' ed OB sono in moto relativo uniforme di allontanamento: si tratta, semplicemente, di sostituire, in ciascuna formula della derivazione –V a V.

A.4 Trasformazioni di Lorentz

I risultati ottenuti nelle appendici precedenti costituiscono la base per la derivazione delle trasformazioni di Lorentz (figura A.3).



Figura A.3. Esperimento ideale per la derivazione delle trasformazioni di Lorentz. Si veda il testo.

Si suppone che all'istante t = t' = 0 le origini dei due sistemi di riferimento coincidano e che all'istante t = 0 *O* lanci verso *O'* un lampo di luce; questo sarà ricevuto e riflesso da *O'* verso *O* all'istante t' = 0 ed *O* riceverà il lampo riflesso all'istante t = 0. All'istante t_1 , *O* invia un secondo lampo di luce verso *O'*; *O'* riceve il lampo all'istante t'_1 . Si consideri l'evento *E* costituito dall'arrivo e dalla riflessione del lampo emesso da *O* su uno specchio, non mostrato in figura, in quiete nel sistema di riferimento di *O'* in un punto con x' > 0. Siano (x, t) e(x', t') le coordinate assegnate a questo evento da *O* e *O'*, rispettivamente. Il lampo riflesso dallo specchio è ricevuto da *O'* all'istante t'_2 e da *O* all'istante t_2 . Le coordinate (x, t) che *O* attribuisce all'evento *E* sono legate ai tempi $t_1 e t_2$ dalle relazioni:

$$t_1 = t - \frac{x}{c} \tag{A.34}$$

$$t_2 = t + \frac{x}{c} \tag{A.35}$$

Analogamente, per quanto concerne O':

$$t'_{1} = t' - \frac{x'}{c}$$

 $t'_{2} = t' + \frac{x'}{c}$
(A.36)

Sommando membro a membro le due precedenti equazioni, si ottiene:

$$t' = \frac{1}{2}(t'_1 + t'_2) \tag{A.37}$$

Per la definizione del coefficiente k, risulta:

$$t_1' = kt_1$$

$$t_2 = k t'_2$$

La (A.37) diventa allora, tenendo conto delle (A.34), (A.35) e delle (A.6):

$$t' = \Gamma\left(t - \frac{B}{c}x\right) = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$
(A.38)

Con un procedimento simile si ottiene, sottraendo membro a membro le (A.36) e procedendo come nel caso precedente:

$$x' = \Gamma(x - Vt) \tag{A.39}$$



Figura A.4. Il lampo di luce lanciato da O' lungo la direzione y' viene riflesso dallo specchio S'. Le linee tratteggiate indicano il percorso della luce secondo O. O'_1, O'_2, O'_3 indicano le successive posizioni di O' nel sistema di riferimento di O. Risulta: $\overline{O'_1O'_2} = \overline{O'_2O'_3} = V\Delta t/2$, dove Δt è la durata del viaggio di andata - ritorno del lampo secondo O.

Queste due ultime equazioni sono le trasformazioni di Lorentz relative alle variabili $x \in t$. Per ricavare le trasformazioni relative alle coordinate $y \in z$ si procede nel modo seguente. L'osservatore O' lancia un lampo di luce nella direzione y' verso uno specchio posto alla distanza l' dalla sua origine. Vale la relazione:

$$\Delta t' = \frac{2l'}{c} \tag{A.40}$$

dove $\Delta t'$ è la durata del 'viaggio' di andata e ritorno del lampo. L'osservatore *O* descrive lo stesso fenomeno come mostrato nella figura A.4. La durata del viaggio di andata e ritorno del lampo, secondo *O* è:

$$\Delta t = \frac{2}{c} \sqrt{l^2 + V^2 \frac{\Delta t^2}{4}} \tag{A.41}$$

Cioè:

$$\Delta t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{4}{c^2} l^2$$
 (A.42)

Infine, usando la (A.9) (formula della 'dilatazione del tempo') e la (A.40):

$$l = l' \tag{A.43}$$

cioè y = y'. Allo stesso modo si dimostra che z = z'.

Appendice B

Cinematica e dinamica relativistica

B.1 Cinematica

La nozione di spazio - tempo permette di sviluppare un formalismo particolarmente adatto a rappresentare le leggi fisiche e l'invarianza della loro forma per trasformazioni di Lorentz. L'idea è quella di rappresentare le grandezze fisiche – quando possibile – con enti matematici tali che la forma delle equazioni in cui essi compaiono rimanga invariata "a vista" passando da un *SRI* ad un altro. Alcuni di questi enti sono i *quadrivettori*.

In questo testo, i quadrivettori saranno rappresentati con lettere calligrafiche per distinguerli dagli usuali vettori tridimensionali. Siccome un quadrivettore $\vec{\mathscr{S}}$ ha componenti S_{μ} con $\mu = 0, 1, 2, 3$, esso può anche essere rappresentato dalla notazione S_{μ} .

Un *quadrivettore* $\hat{\mathscr{I}}$ è un insieme di quattro grandezze (S_0, S_x, S_y, S_z) che si trasformano, nel passaggio da un *SRI* ad un altro, come le coordinate (ct, x, y, z). Il quadrato del modulo di un quadrivettore è dato, per definizione, da $S^2 = S_0^2 - S_x^2 - S_y^2 - S_z^2$. Tale grandezza ha lo stesso valore in ogni *SRI*, perché le componenti di un quadrivettore si trasformano, passando da un *SRI* ad un altro come le quattro coordinate (ct, x, y, z).

Le coordinate (*ct*, *x*, *y*, *z*) di un punto *P* dello spazio - tempo sono le componenti di un quadrivettore: esso, indicato con $\vec{\mathcal{R}}$, individua il punto *P*. A partire dal quadrivettore $\vec{\mathcal{R}}$ è possibile definire il quadrivettore velocità ed il quadrivettore accelerazione di un punto. A questo proposito, si osservi che, se la variazione delle coordinate spaziali *x*, *y*, *z* di un punto nel sistema

di riferimento *K* relativa all'intervallo di tempo *dt* è data, rispettivamente, da *dx*, *dy*, *dz*, lo spostamento del punto è descritto nello spazio - tempo dall'intervallo $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Nel sistema *K*'', istantaneamente comovente con il punto considerato, l'intervallo corrispondente è invece dato da $ds''^2 = c^2 dt''^2$, perché dx'' = dy'' = dz'' = 0. Allora:

$$ds^2 = c^2 dt''^2 (B.1)$$

dt'' è l'*intervallo di tempo proprio*, cioè l'intervallo di tempo tra due eventi che accadono nello stesso punto dello spazio tridimensionale. Si indichi tale intervallo con $d\tau$: la (B.1) assicura che esso è un invariante, perché ds^2 è un invariante e c ha lo stesso valore in ogni *SRI*. Si noti che $d\tau$ rappresenta la variazione della variabile tempo in un punto dello spazio tridimensionale: da un punto di vista operativo, $d\tau$ rappresenta la variazione della variabile tempo mostrata da un orologio collocato nel punto considerato.

Si definisce il *quadrivettore velocità* così:

$$\vec{\mathcal{V}} = \frac{d\vec{\mathscr{R}}}{d\tau} \tag{B.2}$$

con:

$$d\tau = dt'' = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{\gamma}dt$$
 (B.3)

dove v è il modulo del vettore velocità (tridimensionale) del punto e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Si noti la definizione di un *nuovo* parametro $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ in cui compare la velocità *v* (tridimensionale) del punto, da non confondersi con $\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ in cui compare la velocità *V* relativa dei due *SRI*.

Ne segue che le componenti del quadrivettore velocità sono date da:

$$\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}}(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) \tag{B.4}$$

dove v_x , v_y , v_z sono le componenti della velocità del punto considerato nello spazio tridimensionale. Il quadrato del modulo del quadrivettore velocità è un invariante ed è uguale a c^2 , come si verifica immediatamente ponendosi in un sistema di riferimento istantaneamente comovente con il punto.

Mediante le equazioni di trasformazione delle componenti del quadrivettore velocità si può trovare la legge di composizione delle velocità tridimensionali. La trasformazione relativa alla componente temporale:

$$\gamma' c = \Gamma \left(\gamma c - \frac{V}{c} \gamma \nu_x \right) \tag{B.5}$$

266

permette di scrivere che:

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\Gamma\left(1 - \nu_x V/c^2\right)} \tag{B.6}$$

Le equazioni di trasformazione delle altre componenti sono:

$$\begin{aligned} \gamma' v'_x &= \Gamma \left(\gamma v_x - \frac{V}{c} \gamma c \right) \\ \gamma' v'_y &= \gamma v_y \\ \gamma' v'_z &= \gamma v_z \end{aligned}$$

che, tenendo conto della (B.6), diventano:

$$v'_{x} = \frac{v_{x} - V}{1 - v_{x}V/c^{2}}$$
$$v'_{y} = \frac{\sqrt{1 - V^{2}/c^{2}}}{1 - v_{x}V/c^{2}}v_{y}$$
$$v'_{z} = \frac{\sqrt{1 - V^{2}/c^{2}}}{1 - v_{x}V/c^{2}}v_{z}$$

Il *quadrivettore accelerazione* è definito da:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{d\tau} \tag{B.7}$$

Le sue componenti sono:

$$\vec{\mathcal{W}}\left(\gamma \frac{d(\gamma c)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma v_x)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma v_y)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma v_z)}{dt}\right)$$
(B.8)

Si ha:

$$\mathcal{W}_{0} = \frac{1}{c} \frac{v \dot{v}}{(1 - \beta^{2})^{2}}$$

$$\mathcal{W}_{\alpha} = \frac{\dot{v}_{\alpha}}{1 - \beta^{2}} + \frac{v_{\alpha}(v \dot{v})}{c^{2}(1 - \beta^{2})^{2}} \quad \alpha = 1, 2, 3$$

dove si è posto $\beta = v/c$. Si osservi che le componenti del quadrivettore accelerazione sono tutte nulle quando il moto della particella è rettilineo uniforme ($\dot{v} = 0$; $\dot{v}_{\alpha} = 0$) e che, nel *SRI* istantaneamente comovente con la particella (v = 0), la componente temporale è nulla e le tre componenti spaziali coincidono con quelle tridimensionali. Pertanto, il quadrato del modulo del quadrivettore accelerazione coincide, a meno del segno, con il quadrato del modulo della accelerazione tridimensionale valutato nel sistema di riferimento istantaneamente comovente con la particella.

B.2 Dinamica

Se si suppone di poter caratterizzare una particella attribuendole una massa m invariante, ¹ si può definire il *quadrimpulso* della particella:

$$\vec{\mathscr{P}} = m\vec{\mathscr{V}} = \vec{\mathscr{P}}(m\gamma c, m\gamma v_x, m\gamma v_y, m\gamma v_z)$$
(B.9)

Il problema è quello di individuare l'equazione di moto corrispondente alla seconda legge di Newton. *Si assume* che la legge del moto sia, analogamente alla seconda legge della dinamica newtoniana:

$$\frac{d\vec{\mathscr{P}}}{d\tau} = \vec{\mathscr{F}} \tag{B.10}$$

La (B.10) definisce automaticamente la *quadriforza*. Ricordando la (B.3), le sue componenti sono:

$$\vec{\mathscr{F}} = \vec{\mathscr{F}} \left(\gamma \frac{d(m\gamma c)}{dt}, \gamma \frac{d(m\gamma v_x)}{dt}, \gamma \frac{d(m\gamma v_y)}{dt}, \gamma \frac{d(m\gamma v_z)}{dt} \right)$$
(B.11)

Si considerino le componenti spaziali della quadriforza:

$$\mathscr{F}_i = \gamma \frac{d(m\gamma v_i)}{dt}, \qquad i = x, y, z$$
 (B.12)

Siccome si vuole che queste equazioni tendano a quelle della meccanica newtoniana per $(v/c) \rightarrow 0$, è *sufficiente* che sia:

$$\mathscr{F}_i = \gamma f_i \qquad i = x, y, z$$
 (B.13)

dove le f_i sono le componenti tridimensionali della forza. Dalla (B.12) segue che:

$$f_i = \frac{d(m\gamma v_i)}{dt} \qquad i = x, y, z \tag{B.14}$$

In forma vettoriale:

$$\vec{f} = \frac{d(m\gamma\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$
(B.15)

La (B.15) è formalmente identica all'equazione della dinamica newtoniana. La differenza tra le due equazioni risiede nella definizione di \vec{p} : $\vec{p} = m\vec{v}$ nella dinamica newtoniana; $\vec{p} = m(\gamma \vec{v})$ nella dinamica relativistica ².

 $^{^{1}}m$ è anche chiamata *massa a riposo* della particella. Sul ruolo della massa a riposo, si veda la sezione V.3.

²La scrittura $\vec{p} = m(\gamma \vec{v})$ pone in evidenza che la quantità di moto relativistica \vec{p} è data dal prodotto della massa *m* per la componente spaziale $\gamma \vec{v}$ del quadrivettore velocità.

Per trovare l'espressione della componente temporale della quadriforza in funzione delle grandezze tridimensionali si procede nel modo seguente. Il quadrato del modulo del quadrivettore velocità è dato da:

$$\mathcal{V}_{0}^{2} - \mathcal{V}_{x}^{2} - \mathcal{V}_{y}^{2} - \mathcal{V}_{z}^{2} = c^{2}$$
(B.16)

Derivando l'equazione precedente rispetto a τ , si ottiene:

$$\mathcal{V}_0 \frac{d\mathcal{V}_0}{d\tau} = \mathcal{V}_x \frac{d\mathcal{V}_x}{d\tau} + \mathcal{V}_y \frac{d\mathcal{V}_y}{d\tau} + \mathcal{V}_z \frac{d\mathcal{V}_z}{d\tau}$$
(B.17)

Per la (B.10) e la (B.13), l'equazione precedente assume la forma:

$$\mathscr{F}_0 = \frac{\gamma}{c} (f_x v_x + f_y v_y + f_z v_z) = \frac{\gamma}{c} (\vec{f} \cdot \vec{v})$$
(B.18)

In conclusione, la quadriforza è data da:

$$\vec{\mathscr{F}} = \left(\frac{\gamma}{c}(\vec{f} \cdot \vec{\upsilon}), \gamma \vec{f}\right) \tag{B.19}$$

Nel passaggio da un *SRI* ad un altro, le componenti tridimensionali della forza si trasformano secondo le equazioni:

$$f_{x} = \frac{f'_{x} + (\vec{f}' \cdot \vec{v}') V/c^{2}}{1 + V v'_{x}/c^{2}}$$

$$f_{y} = \frac{f'_{y} \sqrt{1 - V^{2}/c^{2}}}{1 + V v'_{x}/c^{2}}$$

$$f_{z} = \frac{f'_{z} \sqrt{1 - V^{2}/c^{2}}}{1 + V v'_{x}/c^{2}}$$
(B.20)
$$\vec{f} \cdot \vec{v} = \frac{\vec{f}' \cdot \vec{v}' + V f'_{x}}{1 + V v'_{x}/c^{2}}$$

dove si è fatto uso della relazione

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1 + V \nu'_x/c^2)} \tag{B.21}$$

e, come al solito, V è la velocità relativa dei due *SRI* e v' la velocità della particella nel sistema di riferimento K'.

Confrontando le componenti temporali fornite dalla (B.11) e dalla (B.19), si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = \vec{f} \cdot \vec{v} \tag{B.22}$$

269

Appendice B - Cinematica e dinamica relativistica

Il secondo membro della (B.22) rappresenta il lavoro compiuto dalla forza tridimensionale nell'unità di tempo; il primo membro dovrebbe quindi rappresentare la variazione dell'energia cinetica nell'unità di tempo. La (B.22) suggerisce pertanto di definire l'energia della particella libera come:

$$E = \gamma mc^2 + A \tag{B.23}$$

Il valore della costante *A* non può essere scelto arbitrariamente, perché si richiede che le formule relativistiche tendano, per velocità piccole ($v/c \rightarrow 0$, $V/c \rightarrow 0$), a quelle della meccanica newtoniana. La (B.23), implica, per la componente temporale del quadrimpulso, l'espressione $\gamma mc + A/c$. Allora la relazione di trasformazione della componente γmv_x del quadrimpulso è:

$$\gamma' m \nu'_{x} = \Gamma \left[\gamma m \nu_{x} - \frac{V}{c} \left(\gamma m c + \frac{A}{c} \right) \right]$$
(B.24)

che, per Γ , $\gamma e \gamma'$ tendenti ad 1 (limite newtoniano), diventa:

$$mv_x' = mv_x - mV - \frac{VA}{c^2} \tag{B.25}$$

Affinché si possa ritrovare la legge di composizione delle velocità di Galileo, deve essere A = 0. Questo risultato rappresenta una netta cesura rispetto alla dinamica newtoniana dove l'energia di una particella, fissato un *SRI*, è sempre definita a meno di una costante. Ne consegue che l'energia di una particella assume l'espressione definitiva:

$$E = \gamma m c^2 \tag{B.26}$$

Quando v = 0, si ottiene:

$$E_0 = mc^2 \tag{B.27}$$

Pertanto, la dinamica relativistica prevede che si debba associare ad una particella a riposo di massa m l'energia mc^2 , detta *energia a riposo della particella*.

⇒ Per esempio, l'energia a riposo dell'elettrone è pari a circa 0.511 MeV.

L'energia cinetica di una particella sarà allora data da:

$$E_{cin} = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1) \tag{B.28}$$

270

Nel limite di velocità piccole $v \ll c$, l'espressione dell'energia cinetica è ben approssimata da quella newtoniana:

$$E_{cin} \approx \frac{1}{2}mv^2 \tag{B.29}$$

A conclusione di queste considerazioni si osservi che il quadrimpulso di una particella può essere scritto come:

$$\vec{\mathscr{P}} = \vec{\mathscr{P}} \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \tag{B.30}$$

ed il quadrato del suo modulo invariante vale:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \tag{B.31}$$

come si verifica immediatamente ponendosi nel *SRI* in cui la particella è istantaneamente in quiete. Per la forma della (B.30), il quadrimpulso viene anche chiamato *quadrivettore energia - impulso*.

Per un sistema fisico composto da più particelle (per esempio una particella composta, un solido, un liquido o un gas) si ha:

$$\vec{\mathscr{P}}^{2} = \frac{1}{c^{2}} \left(\sum_{i} E_{i} \right)^{2} - \left(\sum_{i} \vec{p}_{i} \right)^{2}$$
(B.32)

Se si pone uguale a M^2c^2 il secondo membro della (V.27), *si definisce* la massa M (invariante) di una particella composta o, in generale, di un sistema fisico composto da più particelle. Per calcolare M è conveniente scegliere il SRI in cui la quantità di moto totale del sistema $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ è nulla. Si ottiene allora:

$$M = \frac{1}{c^2} \sum_{i} E_i = \frac{E}{c^2}$$
(B.33)

Se³:

$$E = \sum_{i} m_{i} c^{2} + \langle T \rangle + \langle U \rangle$$
 (B.34)

dove m_i , < T > e < U > sono, rispettivamente, la massa della particella i esima, l'energia cinetica e l'energia potenziale media del sistema di particelle, si ottiene:

$$M = \sum_{i} m_{i} + \frac{1}{c^{2}} (\langle T \rangle + \langle U \rangle)$$
(B.35)

³Siccome nella relatività speciale l'interazione tra due particelle si propaga con velocità finita, l'uso del concetto di energia potenziale è limitato ai casi in cui è fisicamente significativo il suo valore medio. Si veda la sezione V.3.
La massa di un insieme di particelle *non* è uguale alla somma delle masse delle particelle che lo costituiscono. In particolare, per un sistema costituito da due particelle, nel passaggio da uno stato in cui le particelle sono a distanza infinita ed in quiete ad uno stato in cui le particelle interagiscono con energia potenziale negativa (attrazione), la massa del sistema diminuisce. La (B.35) implica che, considerato un insieme isolato di particelle, alla loro energia totale < T > + < U > è associata una massa pari a $(< T > + < U >)/c^2$.

B.3 Emissione o assorbimento di un fotone

Si consideri l'emissione di un fotone da parte di un atomo o di un nucleo *A* in moto rispetto al sistema di riferimento dell'apparato di misura (figura B.1).



Figura B.1. Emissione di un fotone da parte dell'atomo/nucleo *A* in moto. Il fotone è emesso lungo la direzione $A \rightarrow O$: *O* rappresenta la fenditura d'ingresso dello spettroscopio.

Siano:

- $\diamond E_1, E_2$ l'energia a riposo dell'atomo prima e dopo l'emissione;
- \diamond \vec{v}_1 , \vec{v}_2 la velocità dell'atomo prima e dopo l'emissione;
- ♦ θ_1, θ_2 l'angolo che la velocità dell'atomo forma con la direzione di propagazione del fotone prima e dopo l'emissione.

Si noti che le velocità, gli angoli e la direzione di propagazione del fotone sono valutati nel sistema di riferimento dell'apparato di misura e che la geometria del processo è planare.

La conservazione dell'energia richiede che:

$$E_{ph} = \gamma_1 E_1 - \gamma_2 E_2 \tag{B.36}$$

La conservazione della quantità di moto lungo la direzione di emissione del fotone e lungo la direzione ad essa perpendicolare richiede invece che:

$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} \nu_1 \cos \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} \nu_2 \cos \theta_2 + \frac{E_{ph}}{c}$$
 (B.37)

$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} \nu_1 \sin \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} \nu_2 \sin \theta_2$$
(B.38)

dove, al solito, $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - v_i^2/c^2}$; i = 1,2. Posto $v_i/c = B_i$; i = 1,2, dalla (B.36) e dalla (B.37) si ottiene:

$$\gamma_1 E_1 (1 - B_1 \cos \theta_1) = \gamma_2 E_2 (1 - B_2 \cos \theta_2)$$
 (B.39)

Ponendo:

$$\varphi_i = \gamma_i \left(1 - B_i \cos \theta_i \right); \qquad i = 1, 2 \tag{B.40}$$

la (B.39) diventa:

$$\varphi_1 E_1 = \varphi_2 E_2 \tag{B.41}$$

Inoltre, ponendo:

$$\psi_i = \gamma_i B_i \sin \theta_i; \qquad i = 1,2 \tag{B.42}$$

la (B.38), dopo aver moltiplicato entrambi i suoi membri per c, diventa:

$$\psi_1 E_1 = \psi_2 E_2 \tag{B.43}$$

Elevando al quadrato la (B.40) e la (B.42) e sommando successivamente membro a membro si ottiene:

$$\varphi_i^2 + \psi_i^2 = \gamma_i 2\varphi_i - 1$$

che, risolta per γ_i , dà:

$$\gamma_i = \frac{1 + \varphi_i^2 + \psi_i^2}{2\varphi_i}; \qquad i = 1, 2$$
(B.44)

L'equazione di conservazione dell'energia (B.36) si scrive allora, usando la (B.44), la (B.41) e la (B.43):

$$E_{ph} = \frac{1}{2} \left(\frac{E_1}{\varphi_1} - \frac{E_2}{\varphi_2} \right)$$
(B.45)

Questa equazione può anche essere scritta nella forma:

$$E_{ph} = \frac{1}{2} \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1 \varphi_1} = \frac{1}{2} \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_2 \varphi_2}$$
(B.46)

Si osservi ora che $E_1 - E_2 = \Delta E$, dove ΔE è la differenza di energia tra i due livelli energetici della transizione atomica/nucleare. Essendo data dalla differenza tra due energie a riposo, ΔE è un invariante relativistico. L'equazione (B.46), essendo $E_2 = Mc^2$ ed $E_1 = Mc^2 + \Delta E$, assume la forma finale:

$$E_{ph} = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2E_1} \right) \frac{\sqrt{1 - B_1^2}}{1 - B_1 \cos \theta_1}$$

$$= \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2E_2} \right) \frac{\sqrt{1 - B_2^2}}{1 - B_2 \cos \theta_2}$$
(B.47)

che coincide con l'equazione (IV.73) di pagina 138⁴. Se $\Delta E \ll Mc^2$, possiamo scrivere, ponendo $B_T = \Delta E/2Mc^2$:

$$E_{ph} = \Delta E(1 - B_T) \frac{\sqrt{1 - B_1^2}}{1 - B_1 \cos \theta_1} = \Delta E(1 + B_T) \frac{\sqrt{1 - B_2^2}}{1 - B_2 \cos \theta_2}$$
(B.48)

Il caso dell'assorbimento è trattato allo stesso modo, partendo però dalle equazioni di conservazione opportunamente riscritte:

$$E_{ph} = \gamma_2 E_2 - \gamma_1 E_1 \tag{B.49}$$

e:

$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} \nu_1 \cos \theta_1 + \frac{E_{ph}}{c} = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} \nu_2 \cos \theta_2$$

$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} \nu_1 \sin \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} \nu_2 \sin \theta_2$$
(B.50)

Si ottengono così le equazioni (IV.74).

B.4 Assorbimento di un fotone con la dinamica newtoniana

Supponiamo che un atomo di massa m in moto lungo la direzione positiva dell'asse x assorba un fotone di energia E_{ph} che viaggi in direzione opposta. La conservazione della quantità di moto assume la forma:

$$mv_1 - \frac{E_{ph}}{c} = mv_2 \tag{B.51}$$

⁴Questa derivazione riproduce, nei passaggi principali, quella di Schrödinger [41]. Tuttavia, Schrödinger non utilizza la grandezza ΔE : quindi egli non scrive la (B.47).

Giuseppe Giuliani - Elettromagnetismo relatività quanti

dove v_1 e v_2 sono la velocità dell'atomo lungo la direzione x prima e dopo l'assorbimento. Si osservi come la velocità della luce c, estranea alla meccanica newtoniana, appaia in questa equazione attraverso la quantità di moto del fotone. La conservazione dell'energia è data da:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + E_{ph} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \Delta E \tag{B.52}$$

dove ΔE è la differenza di energia tra i due livelli della transizione atomica. Dalla (B.51):

$$v_2 = v_1 - \frac{E_{ph}}{mc} \tag{B.53}$$

Sostituendo questo valore nella (B.52) si ottiene:

$$E_{ph} = \Delta E + \frac{1}{2mc^2} E_{ph}^2 - B_1 E_{ph}$$
(B.54)

dove $B_1 = v_1/c$. Se poniamo:

$$E_{ph} = \Delta E(1+\alpha) \tag{B.55}$$

l'equazione (B.54) diventa:

$$\Delta E(1+\alpha) = \Delta E + \frac{\Delta E}{2mc^2} \Delta E(1+\alpha)^2 - B_1 \Delta E(1+\alpha)$$
(B.56)

Ponendo $B_T = \Delta E/2mc^2$ e mantenendo solo i termini di primo grado in α , B_T , B_1 (approssimazione lineare) si ottiene:

$$\alpha = B_T - B_1 \tag{B.57}$$

Pertanto:

$$E_{ph} = \Delta E(1 + B_T - B_1)$$
 (B.58)

La variazione dell'energia cinetica dell'atomo, dovuta all'assorbimento di un fotone, è data da:

$$\Delta E_K = E_{ph} - \Delta E = \Delta E(B_T - B_1) \tag{B.59}$$

Se $B_1 = 0$, $E_{ph} = \Delta E(1 + B_T)$ e $\Delta E_K = \Delta E^2/2mc^2 = E_R$. E_R è l'energia di rinculo dell'atomo.

La comparsa del termine mc^2 è dovuto al fatto che nell'equazione di conservazione della quantità di moto viene inserito il termine E_{ph}/c del fotone. È quindi possibile attribuire alla massa *m* l'energia a riposo mc^2

sulla base dell'espressione dell'energia di rinculo ricavata con la dinamica newtoniana.

Il caso dell'emissione di un fotone può essere trattato con la stessa approssimazione riscrivendo opportunamente le equazioni di conservazione dell'energia e della quantità di moto.

B.5 Red shift gravitazionale con la relatività speciale

Si consideri un atomo eccitato posto nel campo gravitazionale della Terra e si suppongano entrambi a riposo nel sistema di riferimento con l'origine nel centro della Terra. L'energia a riposo del complesso (atomo + Terra) sarà allora data da:

$$\mathscr{E}_0 = Mc^2 + (mc^2 + \Delta E) - \frac{GM}{r} \left(m + \frac{\Delta E}{c^2}\right)$$

dove *M* e *m* sono, rispettivamente, la massa della Terra e dell'atomo non eccitato, *G* la costante di gravitazione universale, *r* la distanza tra atomo e centro della Terra e ΔE è l'energia di eccitazione dell'atomo in assenza di campo gravitazionale. L'energia disponibile per l'emissione di un fotone da parte dell'atomo sarà quindi:

$$\Delta E(r) = \Delta E\left(1 - \frac{GM}{r}\frac{1}{c^2}\right) = \Delta E\left(1 + \frac{\chi(r)}{c^2}\right)$$
(B.60)

dove χ è il potenziale gravitazionale della Terra nel punto distante *r* dal suo centro. Questo risultato coincide con quello previsto dalla relatività generale, nel caso di campi gravitazionali sufficientemente deboli (II.40). Considerando due valori di *r*, *R* e *R* + *h*, dove *R* = 6378 × 10³ *m* è il raggio della Terra, si ha:

$$\Delta E(R) = \Delta E\left(1 - \frac{GM}{c^2}\frac{1}{R}\right) \tag{B.61}$$

$$\Delta E(R+h) = \Delta E\left(1 - \frac{GM}{c^2} \frac{1}{R+h}\right)$$
(B.62)

Se $h \ll R$, allora:

$$\frac{1}{R+h} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{h}{R} \right)$$

Pertanto:

$$\Delta E(R+h) \approx \Delta E(R) + \Delta E \frac{gh}{c^2} \approx \Delta E(R) \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)$$
(B.63)

dove $g = GM/R^2 = 9.8 \,\mathrm{ms}^{-2}$ è l'accelerazione di gravità.

276

⇒ L'approssimazione $\Delta E \approx \Delta E(R)$ richiede un chiarimento. Dalla (B.61), se *h* = 20 m, si deduce che:

$$\frac{GM}{Rc^2} = \frac{GMR}{R^2c^2} = \frac{gR}{c^2} \approx 6.95 \times 10^{-10}$$

mentre:

$$\frac{gh}{c^2} \approx 1.18 \times 10^{-15}$$

Pertanto, sostituendo nella (B.63) $\Delta E(R)$ a ΔE si introduce un errore il cui ordine di grandezza è dell'ordine di $10^{-10} \times 10^{-15} = 10^{-25}$ che è 10^{10} volte più piccolo del valore che si deve misurare.

Studiamo l'equazione (B.63) in due casi: a) due orologi atomici identici posti ad altitudini diverse; b) emissione di un fotone ad una altitudine e assorbimento dello stesso fotone ad un'altitudine maggiore.

a) La (B.63) indica che le microonde devono fornire più energia ad altitudini maggiori per provocare la transizione quantica tra due livelli energetici. Ne consegue che le frequenze delle microonde dei due orologi posti ad altitudini diverse saranno correlate dalla relazione:

$$\nu(R+h)\approx\nu(R)\left(1+\frac{gh}{c^2}\right)$$

e i periodi fondamentali dei due orologi dalla relazione:

$$T(R+h) \approx T(R) \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)$$
 (B.64)

⇒ In base alla (B.64), il *secondo* scandito da un orologio atomico posto sulla cima del Monte Bianco è minore di quello scandito da un orologio identico posto a livello del mare di circa 5.24×10^{-13} s. Abbiamo posto h = 4810 m e assunto la medesima accelerazione di gravità per le due posizioni.

b) Se un atomo A_1 emette alla distanza R_1 dal centro della Terra un fotone verso l'alto, la sua energia non è sufficiente per provocare la transizione in un atomo A_2 identico posto alla distanza $R_2 = R_1 + h$ dal centro della Terra. Dalla (B.63) si ottiene infatti che l'energia del fotone emesso dall'atomo A_1 è più bassa di quella necessaria alla transizione:

$$E_{ph}(A_1) \approx E_{ph}(A_2) \left(1 - \frac{gh}{c^2} \right)$$
(B.65)

L'atomo A_2 , per poter assorbire il fotone, deve muoversi verso l'atomo A_1 con velocità adeguata a compensare, per effetto Doppler, l'energia mancante. Usualmente ci si riferisce alla (B.65) parlando di *red - shift gravitazionale*, per indicare che la frequenza del fotone appare all'atomo assorbente come spostato verso il rosso. Naturalmente, nel caso in cui l'atomo emettente si trovi ad una altitudine maggiore di quella dell'atomo assorbente, quest'ultimo 'vede' il fotone spostato verso il violetto.

Si noti che il valore del rapporto gh/c^2 è pari a 2.46×10^{-15} per h = 22.55 m. La distanza di 22.55 m tra nucleo emettente e assorbente è quella usata da Pound e Rebka per la prima verifica sperimentale della (B.65) [229].

Per verificare sperimentalmente la predizione teorica è quindi necessario poter misurare l'energia di un fotone con una precisione di una parte su 10^{15} . Ciò è stato reso possibile dalla scoperta, avvenuta nel 1957, dell'effetto Mössbauer.

Appendice C

Induzione elettromagnetica: tre esempi significativi

In questa appendice sono raccolti alcuni esempi concettualmente significativi della legge generale dell'induzione elettromagnetica.

C.1 Dove è localizzata la forza elettromotrice?

Diversamente da quanto comunemente sostenuto, la domanda 'dove è localizzata la forza elettromotrice' ha significato fisico ed è sperimentalmente decidibile 1 .



Figura C.1. La barra conduttrice A, di lunghezza *a*, scorre sul telaio conduttore T con velocità costante \vec{v} nel campo magnetico uniforme \vec{B} perpendicolare al piano del foglio ed entrante. La barra svolge la funzione di una pila nella quale il 'campo elettromotore' di origine chimico - fisica è sostituito dal campo elettrico indotto Bv. Si veda il testo.

La barra conduttrice *A* di lunghezza *a* scorre sul telaio *T* con velocità costante \vec{v} , mantenendo il contatto con il telaio (figura C.1). Telaio e barra -

¹L'errata convinzione che la forza elettromotrice non sia localizzata deriva, verosimilmente, dalla regola del flusso: essa, infatti, non prevede alcuna localizzazione della forza elettromotrice. Come abbiamo visto, anche Einstein sostiene che la questione della sede della forza elettromotrice non ha senso (pagina 94).

Appendice C - Induzione elettromagnetica: tre esempi significativi

costituiti dello stesso materiale conduttore e aventi la stessa sezione - sono immersi in un campo magnetico \vec{B} uniforme e costante, perpendicolare al piano della figura ed entrante. Secondo la legge generale dell'induzione elettromagnetica (III.54), la forza elettromotrice nel circuito *C* costituito dalla barra e dalla parte del telaio alla sinistra di essa – calcolata in senso antiorario – è data da:

$$\mathscr{E} = \oint_{l} \left(\vec{v}_{c} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{dl}$$
(C.1)

perché il primo termine della (III.54) è nullo, essendo il potenziale vettore \vec{A} costante. La velocità della carica è data da ²:

$$\vec{v}_c = \vec{v}_l + \vec{v}_d \tag{C.2}$$

dove \vec{v}_d è la velocità di deriva della carica. Si ha pertanto:

$$\mathcal{E} = \oint_{l} (\vec{v}_{l} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} + \oint_{l} (\vec{v}_{d} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = vBa$$
(C.3)

dove v è la velocità della barra; il secondo integrale è nullo perché la velocità di deriva è diretta come \vec{dl}^3 . La forza elettromotrice è localizzata nella barra, perché dovuta alla velocità delle cariche contenute in essa. Sperimentalmente, il tratto del circuito in cui è localizzata la forza elettromotrice è quello in cui la corrente entra dal punto a potenziale inferiore ed esce dal punto a potenziale superiore. Nel caso in discussione, questo tratto è costituito dalla barra in moto; in qualunque tratto del telaio, la corrente entra dal punto a potenziale superiore ed esce dal punto a potenziale inferiore.

In ogni punto della barra esiste un campo elettrico *indotto* $E_i = vB$ diretto da *M* verso *N*. Nel circuito circola una corrente:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\nu B a S}{\rho l}$$

dove \mathscr{E} è la forza elettromotrice, *l* la lunghezza dell'intero circuito, *S* la sua sezione e ρ la resistività del materiale. Il modulo del vettore densità di corrente sarà allora dato da:

$$J = \frac{vBa}{\rho l}$$

 $^{^2}$ Come al solito, usiamo la legge di composizione delle velocità di Galileo perché $v_l \ll c$ e $v_d \ll c.$

³La velocità di deriva delle cariche nella barra rimane diretta lungo la lunghezza della barra per effetto Hall.

Il campo elettrico effettivo - avente lo stesso valore in ogni punto del circuito - è dato da:

$$E_e = vB\frac{a}{l}$$

Questo è l'unico campo elettrico presente nella parte di telaio a sinistra della barra. Nella barra esso è il risultante del campo elettrico indotto $E_i = vB$ e di un campo elettrico E^* ad esso opposto il cui modulo è tale che:

$$E_e = E_i - E^*$$

Per comprendere quale sia l'origine del campo E^* , si consideri la barra in moto, ma *staccata* dal telaio. Il campo elettrico indotto tende a spostare gli elettroni verso la base della barra (verso il punto M). Tuttavia, appena tale processo inizia, la parte inferiore della barra M si carica negativamente e la parte superiore N positivamente. Si genera quindi tra N ed M un campo elettrico E^* diretto da N a M (verso il basso) che contrasta l'azione del campo indotto. Si raggiunge così una situazione stazionaria caratterizzata dal fatto che la superficie N della barra è carica positivamente e quella Mnegativamente: all'interno della barra il campo elettrico è nullo perché il campo E^* bilancia esattamente il campo indotto E_i . Se ora la barra viene posta in contatto con il telaio mentre continua a muoversi con velocità uniforme, si stabilisce, dopo un fenomeno transiente, una nuova condizione stazionaria: nel circuito scorre una corrente costante ed il campo elettrico E^* è diminuito perché, grazie al moto degli elettroni, la carica statica in N e M è diminuita. Si ha pertanto:

$$E^* = \nu B \left(1 - \frac{a}{l} \right)$$

Quindi il campo elettrico $E_c \cos^2 definito$:

 $E_c = E_e$ neltelaio; $E_c = E^*$ nellabarra

è un campo elettrico conservativo perché la sua circuitazione lungo tutto il circuito è nulla (tabella C.1).

La *differenza di potenziale* $V_N - V_M$, tra i due punti $N \in M$, è, per definizione, il lavoro compiuto dal campo elettrico *conservativo* sulla carica unitaria positiva, quando essa si sposta dal punto N al punto M lungo il telaio o la barra. Nel nostro caso abbiamo (figura C.1):

$$V_N - V_M = E_e(l-a) = \nu B a \left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

Campo elettrico	Simbolo	Modulo	Direzione
Indotto	E_i	νB	1
Effettivo	E_e	vBa/l	1
	E^*	vB(1-a/l)	Ļ
Conservativo	$E_c = E^*$	vB(1-a/l)	Ļ

Appendice C - Induzione elettromagnetica: tre esempi significativi

Tabella C.1. Campi elettrici all'interno della barra in moto.

se calcolata lungo il telaio, e, identicamente:

$$V_N - V_M = E^* a = \nu B a \left(1 - \frac{a}{l} \right)$$

se calcolata lungo la barra. Quindi:

$$V_N - V_M = \mathscr{E}\left(1 - \frac{a}{l}\right) = \mathscr{E} - \frac{a}{l}IR = \mathscr{E} - Ir$$

dove si è indicato con r la resistenza della barra. Si osservi inoltre che vale la relazione:

$$V_N - V_M = IR_T \tag{C.4}$$

dove R_T è la resistenza del telaio. Abbiamo così ritrovato la legge di Ohm.

Nella configurazione sperimentale adottata, la barra si comporta come una pila in cui il campo cosiddetto elettromotore di origine chimico - fisica è sostituito dal campo elettrico indotto dal moto della barra. Si noti come il campo elettrico indotto e il campo E^* abbiano nel caso della barra una origine fisica chiara. Invece, nel caso della pila il campo elettromotore (che corrisponde al campo elettrico indotto della barra) ed il campo E^* hanno un'origine fisica complessa di natura chimico - fisica. Si noti infine che la barra in moto nel campo magnetico, come una pila, *non si comporta come un conduttore ohmico*. Infatti, la differenza di potenziale tra i suoi estremi vale $\mathcal{E} - Ir$ mentre il prodotto della corrente che l'attraversa per la sua resistenza vale Ir.

Siccome nella barra circola una corrente diretta dal punto M al punto N, la velocità delle cariche positive contenute nella barra (cui convenzionalmente si attribuisce il flusso di corrente) ha due componenti: la componente v della barra e la componente v_d diretta da M verso N. La forza di Lorentz dovuta al campo magnetico e agente sulle cariche positive della barra ha quindi una componente qvB diretta da M verso N e una componente qv_dB diretta in senso opposto al moto della barra. Quest'ultima componente, tuttavia, viene esattamente bilanciata, in condizioni stazionarie, dal campo elettrico di Hall che si stabilisce tra le due pareti della barra perpendicolari al suo moto. Quindi, in condizioni stazionarie, l'unica componente effettiva della forza di Lorentz derivante dal campo magnetico è quella diretta da *M* verso *N* il cui modulo è qvB. È questa la ragione per cui nell'espressione della forza elettromotrice del circuito compare solo la velocità *v* della barra.

Il lavoro compiuto dalla forza elettromotrice del circuito nell'unità di tempo è dato da:

$$W(\mathscr{E}) = \mathscr{E}I = \frac{\mathscr{E}^2}{R} \tag{C.5}$$

Questo lavoro viene dissipato sotto forma di calore, perché le condizioni del circuito sono stazionarie; l'energia viene fornita dalla forza necessaria per mantenere la barra in moto rettilineo uniforme. Questa forza è uguale e contraria a quella che il campo magnetico esercita sulla barra in quanto percorsa dalla corrente *I* e il suo modulo è dato da:

$$F = IBa = \frac{vBa}{R} \cdot Ba$$

e la potenza necessaria per mantenere la barra in moto da:

$$W(F) = F \cdot v = \frac{\mathscr{E}^2}{R} \tag{C.6}$$

Questa potenza coincide con la potenza $W(\mathscr{E})$ (C.5) dissipata nel circuito.

Le considerazioni di bilancio energetico svolte mostrano che il dispositivo studiato converte l'energia meccanica, necessaria per mantenere la barra in moto, in energia elettrica; questa, a sua volta, viene convertita per effetto Joule in calore. Il campo magnetico svolge, in questo processo, un ruolo di intermediario permettendo la trasformazione dell'energia meccanica in energia elettrica.

È interessante vedere come il fenomeno è descritto nel SRI *K'*, comovente con la barra. In ogni punto di *K'* - per la terza equazione delle (III.40, pagina 77) - c'è un campo elettrico dato da $E' = \Gamma vB$ (dove *B* è il campo magnetico misurato nel sistema di riferimento del laboratorio e $\Gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ è il solito fattore relativistico) diretto lungo il verso positivo dell'asse *z'* (figura C.2). Abbiamo:

$$\mathscr{E}' = \oint_{l} (\vec{E}' + \vec{v}'_{c} \times \vec{B}') \cdot \vec{dl'}$$
(C.7)

Facendo riferimento alla figura C.2 si vede che $\mathscr{E}' = \Gamma v B a = \Gamma \mathscr{E}$ grazie al campo elettrico $\Gamma B v$ presente in ogni punto della barra. Nel braccio del telaio parallelo alla barra non compare alcuna forza elettromotrice, perché in



Figura C.2. Descrizione del fenomeno secondo il sistema di riferimento K' solidale con la barra. Le grandezze accentate si riferiscono a K'; quelle non accentate al sistema di riferimento del laboratorio (e del magnete che genera il campo).

ogni punto del telaio, che è visto da K' scorrere con velocità $-\vec{v}$, si sommano, elidendosi, due campi: quello derivante dalla terza equazione delle (III.40), pari a $\Gamma B v$, e quello derivante dalla componente magnetica della forza di Lorentz, pari a $\Gamma B v$ e diretto in senso opposto. Infine, si noti come la relazione $\mathscr{E}' = \Gamma \mathscr{E}$ ottenuta per la forza elettromotrice nel SRI della barra sia uguale a quella per la forza elettromotrice nel SRI del circuito filiforme in moto relativo rispetto al magnete: si veda la figura III.10 a pagina 93. Ciò non deve sorprendere perché il caso della barra in moto è un caso particolare di quello più generale del moto relativo tra un magnete e un circuito filiforme rigido.

C.2 Il disco di Corbino

Nel 1911 Corbino [77] studiò il caso di un disco conduttore con un foro circolare al suo centro (figura C.3). Corbino usava dischi di bismuto che è un semi - metallo. Nei semi - metalli la conduzione elettrica, a qualsiasi temperatura, è dovuta sia ad elettroni sia a buche. Noi studieremo il caso semplice di un disco conduttore in cui la conduzione è dovuta solo agli elettroni.

La circonferenza interna ed esterna del disco, di raggio r_1 e r_2 rispettivamente, sono in contatto con elettrodi circolari di alta conducibilità che rendono tali circonferenze, con buona approssimazione, equipotenziali. Se una differenza di potenziale è applicata tra la circonferenza interna e quella esterna del disco, questo è percorso da una corrente radiale. Se il disco viene immerso in un campo magnetico costante, uniforme e perpendicolare al piano del



Figura C.3. Disco di Corbino costituito da un disco conduttore con al centro un foro di raggio r_1 . La circonferenza interna ed esterna (di raggio r_2) del disco sono rese equipotenziali da uno strato di materiale ad alta conducibilità.

disco, il disco viene percorso anche da una corrente circolare⁴.

La resistenza radiale e circolare del disco si calcolano nel modo seguente. Si considera una corona circolare di raggio r e ampiezza dr. La resistenza radiale di questa corona è data da:

$$dR_{\text{radiale}} = \rho \frac{dr}{2\pi rs}$$

dove ρ è la resistività e *s* lo spessore del disco; e la sua ammettenza circolare (inverso della resistenza) è data da:

$$dY_{\rm circolare} = \frac{1}{\rho} \frac{sdr}{2\pi r}$$

Pertanto la resistenza radiale e circolare del disco sono date da:

$$R_{\text{radiale}} = \frac{\rho}{2\pi s} \ln \frac{r_2}{r_1}$$
(C.8)

$$R_{\rm circolare} = \frac{\rho^2}{s^2} \frac{1}{R_{\rm radiale}}$$
(C.9)

Indicata con I_{radiale} la corrente radiale, la densità radiale di corrente J(r), dipendente da r, sarà:

$$J(r) = \frac{I_{\text{radiale}}}{2\pi r s}$$

e la velocità di deriva radiale:

$$v(r)_d = \frac{I_{\text{radiale}}}{2\pi r sne}$$

⁴von Klitzing ha osservato che l'effetto Hall quantico può essere considerato come una versione ideale (e quantizzata) del disco di Corbino corrispondente al caso in cui la corrente (prodotta da una differenza di potenziale radiale) è solo circolare [78].

Appendice C - Induzione elettromagnetica: tre esempi significativi

dove n è la concentrazione degli elettroni ed e la loro carica in valore assoluto.

Applicando l'equazione (III.54, pagina 88), in cui la velocità della carica è la velocità di deriva radiale, si ottiene che la forza elettromotrice indotta lungo una circonferenza di raggio r è data da:

$$\mathscr{E}_{\text{circolare}} = \oint_0^{2\pi} \left(\vec{v}(r)_d \times \vec{B} \right) \cdot \left(\vec{d\alpha} \times \vec{r} \right) = \frac{I_{\text{radiale}} B}{sne}$$
(C.10)

Si noti come la forza elettromotrice circolare indotta non dipenda da r. La corrente circolare $dI(r)_{\text{circolare}}$ che scorre in una corona di raggio r e sezione $s \cdot dr$ sarà:

$$dI_{\text{circolare}} = \frac{\mathscr{E}_{\text{circolare}} \, s \, dr}{\rho \, 2\pi r} = \frac{\mu B}{2\pi} I_{\text{radiale}} \frac{dr}{r}$$

e la corrente circolare totale:

$$I_{\text{circolare}} = \frac{\mu B}{2\pi} I_{\text{radiale}} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{s}{\rho} \mu B I_{\text{radiale}} R_{\text{radiale}}$$
(C.11)

dove $\mu = 1/\rho n e$ è la mobilità degli elettroni. La potenza dissipata nel disco è:

$$W = (I^2 R)_{\text{radiale}} + (I^2 R)_{\text{circolare}} = I_{\text{radiale}}^2 R_{\text{radiale}} (1 + \mu^2 B^2)$$
(C.12)

 $= \mathscr{E}_{radiale} I_{radiale}$

dove $\mathscr{E}_{radiale} = I_{radiale}R_{radiale}(1 + \mu^2 B^2)$. Questa equazione mostra che il fenomeno può essere descritto in termini di un incremento della resistenza radiale di un fattore uguale a $(1 + \mu^2 B^2)$: questo effetto è chiamato *magnetoresistenza*. La forza elettromotrice circolare indotta è distribuita omogeneamente lungo ogni circonferenza: ogni corona circolare di sezione $s \cdot dr$ agisce come una pila che produce corrente sulla propria resistenza; pertanto la differenza di potenziale tra due punti qualsiasi di una circonferenza è nulla. Quindi ogni circonferenza è una linea equipotenziale.

L'applicazione della legge generale dell'induzione elettromagnetica al disco di Corbino è interessante perché:

- mostra come la velocità di deriva degli elettroni contribuisce alla forza elettromotrice indotta;
- fornisce una teoria macroscopica del disco di Corbino, cioè una teoria che non deve tenere conto di processi microscopici quali il moto degli elettroni e i loro urti.

C.3 Il disco di Faraday con simmetria radiale

Il disco di Faraday è un disco di Corbino in cui la forza elettromotrice radiale è prodotta dalla rotazione del disco invece che da una pila. Si consideri un disco di Faraday in cui la simmetria circolare è conservata (predisponendo in modo opportuno i contatti con il circuito esterno): come mostrato nella sezione precedente, la condizione stazionaria è caratterizzata dal flusso di una corrente radiale e di una corrente circolare. La potenza meccanica necessaria per mantenere il disco in rotazione a velocità angolare costante è uguale al lavoro per unità di tempo compiuto dal campo magnetico sulle correnti radiali (essendo nullo il lavoro sulle correnti circolari). Si avrà pertanto:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} (I_{\text{radiale}} dr) B \frac{\Omega r dt}{dt}$$

= $I_{\text{radiale}} \int_{r_1}^{r_2} B\Omega r dr$
= $I_{\text{radiale}} \frac{1}{2} \Omega B (r_2^2 - r_1^2) = I_{\text{radiale}} \mathscr{E}_{\text{radiale}}$

Il termine

$$\mathscr{E}_{\text{radiale}} = \frac{1}{2} \Omega B \left(r_2^2 - r_1^2 \right)$$

rappresenta la forza elettromotrice radiale dovuta al moto del disco: questa forza elettromotrice è la sorgente delle correnti indotte, radiale e circolare. Pertanto, la fisica del disco di Faraday a simmetria circolare può essere così riassunta:

- a) la sorgente delle correnti indotte radiale e circolare è la forza elettromotrice indotta dovuta *solo* al moto del disco;
- b) il prodotto primario della forza elettromotrice indotta è la corrente radiale;
- c) la velocità di deriva della corrente radiale produce a sua volta una forza elettromotrice circolare che dà origine alla corrente circolare.

Appendice D

Materiali otticamente anisotropi

In questa appendice si prendono in considerazione *materiali isolanti omogenei e anisotropi* per i quali si assume uguale ad uno la permeabilità magnetica relativa ($\mu_r = 1$).

D.1 Caratteristiche dell'anisotropia ottica

L'anisotropia ottica di questi materiali è legata alla suscettività dielettrica χ e, quindi, alla costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 1 + \chi$. Per questi materiali, la relazione tra il vettore polarizzazione elettrica \vec{P} e il campo elettrico \vec{E} è data da:

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j$$
 $i = 1, 2, 3;$ $j = 1, 2, 3$ (D.1)

dove χ_{ij} è un tensore simmetrico ($\chi_{ij} = \chi_{ji}$). Essendo il materiale omogeneo, è possibile individuare tre assi cartesiani ortogonali rispetto ai quali le componenti non diagonali del tensore sono nulle (*assi principali*). La (D.1) diventa allora:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ii} E_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Pertanto, se il campo elettrico è diretto lungo un asse principale, i vettori polarizzazione elettrica \vec{P} e spostamento elettrico $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$ sono diretti come il campo elettrico. In generale, invece, nei materiali anisotropi, il vettore polarizzazione elettrica \vec{P} e il vettore spostamento elettrico \vec{D} non sono paralleli al vettore campo elettrico. D'ora innanzi, la terna degli assi *x*, *y*, *z* verrà assunta coincidente con gli assi principali del cristallo, omogeneo. Un'onda luminosa piana che si propaga in un mezzo materiale è descritta dalla formula:

$$Ae^{i\omega[(n/c)\hat{s}\cdot\vec{r}-t]} \tag{D.2}$$

dove $A \ge l'$ ampiezza, n l'indice di rifrazione del mezzo, \hat{s} il versore del vettore d'onda $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\hat{s}$ ed \vec{r} il vettore che individua un punto generico del piano dell'onda; $v_s = c/n = v\lambda_0/n = v\lambda = \omega/k$ è la velocità di propagazione del fronte dell'onda (λ_0 è la lunghezza d'onda nel vuoto). L'indice di rifrazione e (quindi) la velocità v_s di propagazione del fronte d'onda sono le grandezze che devono essere determinate sulla base della conoscenza della costante dielettrica relativa lungo i tre assi principali.

Si dimostra che:

1. In generale, la direzione di propagazione del fronte di un'onda piana *non* coincide con la direzione di propagazione dell'energia, individuata dalla direzione del vettore di Poynting $\vec{P} = (1/\mu_0)\vec{E} \times \vec{B}$. La relazione tra le direzioni dei vettori elettromagnetici è mostrata in figura D.1.



Figura D.1. Disposizione dei vettori del campo elettromagnetico di un'onda piana in un mezzo isolante anisotropo con $\mu_r = 1$. Il campo magnetico \vec{B} è perpendicolare al piano della figura ed entrante. Il versore \hat{s} indica la direzione di propagazione del fronte d'onda piano; il versore del vettore di Poynting \hat{t} indica invece la direzione di propagazione dell'energia. L'angolo α tra i due versori è uguale a quello tra i due vettori \vec{E} e \vec{D} : esso è nullo solo quando l'onda incidente si propaga parallelamente ad un asse principale del cristallo. I vettori della terna \vec{B} , \vec{D} , \hat{s} sono tra loro perpendicolari. Lo stesso vale per i vettori della terna \vec{B} , \vec{E} , \hat{t} .

2. Nel mezzo si propagano due onde piane indipendenti polarizzate linearmente: i loro indici di rifrazione sono, in generale, diversi. Questi possono essere individuati mediante la seguente procedura. Posto:

$$x = \frac{D_x}{\sqrt{\varepsilon_0 u}}, \ y = \frac{D_y}{\sqrt{\varepsilon_0 u}}, \ z = \frac{D_z}{\sqrt{\varepsilon_0 u}}$$
(D.3)

dove $u = \vec{E} \cdot \vec{D}$ è la densità di energia, si noti che *x*, *y*, *z* sono grandezze adimensionali. L'equazione:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1$$
 (D.4)

dove $n_i = \sqrt{\varepsilon_{r_i}}$ (*i* = *x*, *y*, *z*), è l'equazione di un ellissoide, detto ellissoide degli indici.

Dato il versore \hat{s} di propagazione del fronte dell'onda incidente, si considera il piano ad esso perpendicolare passante per il centro dell'ellissoide degli indici. La sua intersezione con l'ellissoide è un'ellisse: i suoi semiassi individuano le due direzioni di 'vibrazione' del vettore \vec{D} relativo a due onde *indipendenti* polarizzate linearmente lungo direzioni *ortogonali*; la lunghezza dei semiassi fornisce i relativi indici di rifrazione. La direzione di 'vibrazione' di \vec{E} di una delle due onde *indipendenti* è individuata nel seguente modo (si veda la figura D.1): \vec{E} giace nel piano individuato da \hat{s} e \vec{D} e forma con quest'ultimo vettore un angolo α determinato dall'equazione:

$$\vec{E} = \sum_{i} \frac{D_{i}}{\varepsilon_{i}} \hat{i} \quad i = x, y, z$$
(D.5)

Infine, la direzione di propagazione dell'energia è individuata ricordando che \hat{t} giace nello stesso piano di \hat{s} , \vec{D} ed \vec{E} ed è perpendicolare a quest'ultimo (figura D.1).

Nei casi più semplici l'ellissoide degli indici è un ellissoide di rotazione (due degli indici sono uguali); l'ellissoide si riduce ad una sfera nel caso in cui il materiale è isotropo.

I cristalli per i quali l'ellissoide degli indici è un ellissoide di rotazione si chiamano *uniassici*: esempi sono la calcite ($CaCO_3$; detta anche spato d'I-slanda) e il quarzo (SiO_2). L'asse di rotazione dell'ellissoide degli indici è chiamato *asse ottico*. I due indici di rifrazione che caratterizzano i cristalli uniassici si chiamano 'ordinario' e 'straordinario': quest'ultimo è quello relativo all'asse ottico; il primo è quello relativo agli altri due assi. I loro valori per la calcite sono:

$$n_s = 1.4864$$

 $n_o = 1.6585$

Per i cristalli uniassici,, l'ellisse di intersezione tra il piano ortogonale a \hat{s} e l'ellissoide degli indici ha le seguenti caratteristiche: la lunghezza di uno dei due semiassi è sempre uguale a n_o ; la lunghezza dell'altro varia tra n_o e n_s . Se la direzione di \hat{s} coincide con quella dell'asse ottico, i due indici che caratterizzano la propagazione delle due onde indipendenti nel mezzo coincidono con n_o .

D.2 Uso di materiali otticamente anisotropi



Figura D.2. Lamina di cristallo uniassico tagliata parallelamente all'asse ottico, coincidente con l'asse *x*. θ è l'angolo formato dal vettore campo elettrico della luce con l'asse ottico della lamina; nel caso descritto nella figura, esso è positivo.

I materiali otticamente anisotropi sono utilizzati per ottenere fasci di luce variamente polarizzati. Si consideri una lamina di cristallo, uniassico tagliato in modo che l'asse ottico sia parallelo ad uno dei suoi lati (nella figura D.2 l'asse ottico è diretto lungo l'asse *x*). Un'onda piana sinusoidale di pulsazione ω linearmente polarizzata incide perpendicolarmente sulla lamina. Sia θ l'angolo formato dal vettore campo elettrico dell'onda con l'asse ottico. L'onda incidente può essere descritta come risultante dalla sovrapposizione di due onde piane polarizzate linearmente lungo *x* e *y*, il cui campo elettrico ha ampiezza $E_0 \cos \theta \in E_0 \sin \theta$, rispettivamente: per queste due onde, \vec{E} e \vec{D} hanno la stessa direzione e la direzione di propagazione dell'energia e del fronte d'onda coincidono con quella dell'asse *z* (si veda la figura D.2) ¹. Sulla superficie anteriore della lamina si ha, essendo *z* = 0:

$$E_x = E_0 \cos\theta \cos(2\pi\nu t)$$
$$E_y = E_0 \sin\theta \cos(2\pi\nu t)$$

Sulla superficie posteriore, si avrà:

$$E_x = E_0 \cos\theta \cos 2\pi \left(vt - \frac{d}{\lambda_0} n_s \right)$$
(D.6)

$$E_y = E_0 \sin\theta \cos 2\pi \left(v t - \frac{d}{\lambda_0} n_0 \right)$$
(D.7)

¹Per i dettagli, si veda a pagina 290.

dove *d* è lo spessore della lamina e λ_0 la lunghezza d'onda nel vuoto. Sulla superficie posteriore della lamina la differenza di fase tra l'onda 'straordinaria' descritta dalla (D.6) e l'onda 'ordinaria' descritta dalla (D.7) è:

$$\varphi_s - \varphi_o = 2\pi \frac{d}{\lambda_0} (n_o - n_s)$$

Se tale differenza di fase è un multiplo dispari di $\pi/2$ l'onda uscente dalla lamina sarà, in generale, polarizzata ellitticamente in senso destrorso se, come per lo spato d'Islanda, $n_o > n_s$; per $\theta = \pi/4$, la polarizzazione dell'onda uscente sarà circolare destrorsa.

Polarizzazione		Polarizzazione
incidente	$ heta_i$	uscente
Nessuna		Nessuna
Rettilinea	$0 < \theta_i < \pi/2 \ (\theta_i \neq \pi/4)$	Ellittica D
Rettilinea	$0 < \theta_i < -\pi/2 \ (\theta_i \neq -\pi/4)$	Ellittica S
Rettilinea	$0, \pi/2$	Rettilinea, $\theta_u = 0, \pi/2$
Rettilinea	$\pi/4$	Circolare D
Rettilinea	$-\pi/4$	Circolare S
Circolare D		<i>Rettilinea</i> con $\theta_u = \pi/4$
Circolare S		Rettilinea con $\theta_u = -\pi/4$

Lamina a quarto d'onda

Tabella D.1. Effetto di una lamina a quarto d'onda di calcite (indice di rifrazione ordinario maggiore dell'indice di rifrazione straordinario) sulla polarizzazione della luce incidente. $\theta_{i,u}$ è l'angolo formato dal vettore campo elettrico con l'asse ottico della lamina.

Una lamina che produce questo tipo di polarizzazione si chiama lamina a quarto d'onda perché il suo spessore è proporzionale a $\lambda_0/4$. Una lamina di calcite ($n_o > n_s$) a quarto d'onda introduce un ritardo pari a un multiplo dispari di $\pi/2$ nella fase dell'onda ordinaria rispetto a quella dell'onda straordinaria. Se la luce entrante nella lamina di calcite a quarto d'onda è polarizzata circolarmente, all'uscita essa sarà polarizzata linearmente. La tabella D.1 riassume le proprietà di una lamina di calcite a quarto d'onda.

Una lamina che provoca uno sfasamento pari ad un multiplo dispari di π si dice *a mezz'onda*, perché il suo spessore è proporzionale a $\lambda_0/2$. L'effetto di una lamina a mezz'onda è riassunto nella tabella D.2.

Si consideri ora il caso in cui la direzione di incidenza della luce sulla lamina della figura D.2 non è ortogonale alla lamina. In questo caso, le due onde vengono *rifratte* in modo diverso: in una descrizione in termini di 'raggi', i

Polarizzazione	Polarizzazione		
incidente	θ_i	uscente	θ_u
Nessuna		Nessuna	
Rettilinea	$0 < \theta_i < \pi/2$	Rettilinea	$\theta_u = -\theta_i$
Rettilinea	$0, \pi/2$	Rettilinea	$0, \pi/2$
Circolare D		Circolare S	
Circolare S		Circolare D	

Lamina a mezz'onda

Tabella D.2. Effetto di una lamina a mezz'onda sulla polarizzazione della luce incidente. $\theta_{i,u}$ è l'angolo formato dal vettore campo elettrico della luce con l'asse ottico della lamina (figura D.2).

due raggi ordinario e straordinario sono spazialmente separati dalla diversa rifrazione subita nel mezzo. Questo fenomeno è detto *birifrangenza* ed è, per esempio, utilizzato nel *prisma di Nicol* per ottenere luce polarizzata linearmente, oppure quando è necessario separare i cammini delle due onde.

D.3 Misura della polarizzazione della luce

Usando un polarizzatore lineare ed una lamina a quarto d'onda, è possibile stabilire quale sia lo stato di polarizzazione di un fascio di luce *prima della misura*. Gli effetti di una lamina a quarto d'onda sulla polarizzazione della luce sono riassunti nella tabella D.1. Supponiamo che un fascio di luce incida perpendicolarmente su un polarizzatore lineare. Se facciamo ruotare il polarizzatore lineare attraverso un angolo di 2π ed osserviamo l'intensità della luce all'uscita del polarizzatore lineare, si potranno verificare tre situazioni (indicheremo con *N* la luce 'naturale', cioè non polarizzata; con *L* quella polarizzata ellitticamente):

- 1. *L'intensità trasmessa varia passando attraverso due massimi e due minimi nulli*²: la luce incidente è polarizzata linearmente (*L*).
- 2. *L'intensità trasmessa non cambia ruotando il polarizzatore lineare*: la luce incidente non è polarizzata (N); oppure la sua polarizzazione è circolare (C); oppure essa è in parte non polarizzata e in parte polarizzata circolarmente (N + C). Per distinguere tra queste possibilità

²I due minimi sono nulli solo se il polarizzatore lineare è ideale.

bisogna far passare la luce attraverso una lamina a quarto d'onda e, successivamente, attraverso un polarizzatore lineare: se la luce incidente non è polarizzata (*N*), essa sarà non polarizzata anche dopo la lamina e, ruotando il polarizzatore lineare finale, l'intensità della luce uscente rimarrà costante. Se la luce incidente è polarizzata circolarmente (*C*), essa uscirà dalla lamina polarizzata linearmente lungo una delle due direzioni perpendicolari che formano con l'asse ottico della lamina un angolo di $\pm \pi/4$, a seconda che la polarizzazione sia destrorsa o sinistrorsa (si veda la tabella D.1): l'intensità della luce uscente dal polarizzatore lineare finale presenterà due massimi e due minimi nulli. Nell'ultimo caso (*N*+*C*), l'intensità della luce uscente presenta, quando il polarizzatore lineare ruota, due minimi non nulli.

3. L'intensità trasmessa varia passando attraverso due massimi e due mi*nimi non nulli*: la luce incidente è polarizzata ellitticamente (*E*); oppure la luce incidente è parzialmente polarizzata linearmente (N+L); oppure la luce incidente è in parte polarizzata linearmente e in parte ellitticamente (L + E) o è parzialmente polarizzata ellitticamente (N+E). Per distinguere tra queste possibilità è necessario interporre tra la sorgente della luce ed il polarizzatore lineare una lamina a quarto d'onda il cui asse ottico sia diretto parallelamente o perpendicolarmente alla direzione dell'asse del polarizzatore lineare quando esso è orientato per trasmettere l'intensità minima. Se, ruotando il polarizzatore lineare: a) l'intensità passa per un minimo nullo, allora la luce è polarizzata ellitticamente (*E*); b) l'intensità passa per un minimo non nullo in corrispondenza dell'orientamento iniziale del polarizzatore lineare, allora la luce è parzialmente polarizzata linearmente (N + L); c) l'intensità passa per un minimo non nullo in corrispondenza di un orientamento del polarizzatore lineare obliguo rispetto al suo orientamento iniziale, allora la luce è parzialmente polarizzata ellitticamente (N + E) o polarizzata in parte ellitticamente e in parte linearmente (E + L).

Le scienze hanno due estremi che si toccano. Il primo è la pura ignoranza naturale, in cui si trovano, nascendo, tutti gli uomini; l'altro è quello cui giungono le grandi anime, le quali, avendo percorso tutto lo scibile umano, si avvedono di non saper nulla, e si ritrovano così nella stessa ignoranza iniziale. Ma la loro è un'ignoranza dotta che conosce sé stessa. Tra i due estremi si ritrovano coloro che sono usciti dall'ignoranza naturale, ma non sono potuti giungere all'altra: hanno una certa infarinatura di Scienza presuntuosa e fanno i saputi. Costoro mettono a soqquadro il mondo e giudicano a sproposito di ogni cosa [230, n. 338].

Blaise Pascal

Bibliografia

- [1] Planck M 1942 La conoscenza del mondo fisico (Einaudi, Torino)
- [2] Hottois G 2006 La technoscience: de l'origine du mot à ses usages actuels *Recherche en soins infirmiers* **86** 24
- [3] Uzan J P 2003 The fundamental constants and their variation: observational and theoretical status *Rev. Mod. Phys.* **75** 403 arxiv
- [4] Reichenbach H 1954 *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica* (Boringhieri, Torino) trad. ingl.
- [5] Bridgman P 1955 *Reflections of a physicist* (Philosophical Library, New York)
- [6] Galilei G 1623 Il saggiatore
- [7] Suppe F 1977 a cura di *The structure of scientific theories* 2nd ed. (University of Illinois Press, Urbana)
- [8] Corbino O M 1909 I fondamenti sperimentali delle nuove teorie fisiche in: Corbino O M Conferenze e discorsi (Edizioni Enzo Pinci, Roma, 1938)
- [9] Giuliani G 2006 Il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno *G. Fis.* **47** 345 in rete anche qui
- [10] Hacking I 1982 Experimentation and Scientific Realism *Philosophical Topics* 13 71
- [11] Hertz H 1893 *Electric Waves* (McMillan, London)
- [12] Giuliani G 1998 What are physicists talking about? The case of electrons and holes *N. Cim.* D **20** 1183

- [13] Maxwell J C 1881 A Treatise on Electricity and Magnetism second ed. vol. I (Clarendon Press, Oxford)
- [14] Maxwell J C 1879 Ether in: Enciclopædia Britannica IX edn vol 8 (Edinburgh, Encyclopædia Britannica, Inc.) trad. it. a cura di Giuliani G
- [15] Winther R G 2016 The Structure of Scientific Theories Stanford Encyclopedia of Philosophy
- [16] Hertz H 1899 *The Principles of Mechanics Presented in a New Form* (MacMillan, London)
- [17] Bohr N 1913 On the Constitution of Atoms and Molecules Part I *Phil. Mag.* 26 1
- [18] de Laplace P S 1840 *Essai philosophique sur la probabilité* VI ed. (Bachelier, Paris)
- [19] Poincaré H 1892 1899 Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste vol. 1, 2, 3 (Gauthier - Villars, Paris)
- [20] Musielak Z E and Quarles B 2014 The three body problem *Rep. Prog. Phys.* 77 065901 arxiv
- [21] Poincaré H 1920 Science et Méthode (Flammarion, Paris)
- [22] Goulielmakis E et al. 2004 Direct Measurement of Light Waves Science 305 1267
- [23] Lucrezio De rerum natura
- [24] Fraser J 1981 Report on the Literature of Time in: Fraser J, Lawrence N and Park D (eds.) *The Study of Time* IV (Springer, New York)
- [25] Rugh S E and Zinkernagel H 2017 Limits of time in cosmology in: Chamcham K, Silk J, Barrow J and Saunders S eds. *The Philosophy of Cosmology* (Cambridge University Press) 377 arxiv
- [26] Einstein A 1988 *Autobiografia scientifica* in: Bellone E (a cura di) *Albert Einstein, Opere scelte* (Bollati Boringhieri, Torino)
- [27] Einstein A 1905 Zur Electrodynamik bewegter Körper Ann. Phys. 17 891 trad. it. a cura di Antoci S

- [28] Cattaneo C 1958 Sui postulati comuni alla cinematica classica e alla cinematica relativistica *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* 24 527 in rete qui
- [29] Giuliani G e Bonizzoni I 2004 *Lineamenti di elettromagnetismo* (La Goliardica Pavese, Pavia)
- [30] Bondi H 1980 *Relativity and common sense: a new approach to Einstein* (Dover, New York)
- [31] Ugarov V 1982 Teoria della relatività ristretta (MIR, Mosca)
- [32] Wortel S, Malin S and Semon M 2007 Two examples of circular motion for introductory courses in relativity *Am. J. Phys.* **75** 1123 arxiv
- [33] Minkowski H 1909 Spazio e tempo N. Cim. 18 333
- [34] Hafele J C 1972 Relativistic Time for Terrestrial Circumnavigations Am. J. Phys. 40 81
- [35] Hafele J C and Keating R E 1972 Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains *Science* **177** 166
- [36] Hafele J C and Keating R E 1972 Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains *Science* **177** 168
- [37] Alley C 1979 Relativity and clocks *Proc. XXXIII Ann. Symp. on Frequency Control* 4
- [38] Giuliani G 2013 Experiment and theory: the case of the Doppler effect for photons *Eur. J. Phys.* **34** 1035 arxiv
- [39] Giuliani G 2014 On the Doppler effect for photons in rotating systems *Eur. J. Phys.* 35 025015 (16pp) arxiv
- [40] Giuliani G 2015 Conservation laws and laser cooling of atoms *Eur. J. Phys.* **36** 065008 (19pp) arxiv
- [41] Schrödinger E 1922 Dopplerprinzip und bohrsche frequenzbedingung *Phys. Zeits.* **23** 301 trad. it. a cura di Antoci S
- [42] Reinhardt S et al. 2007 Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities *Nature Phys.* **3** 861

- [43] Rossi B and Hall D B 1941 Variation of the Rate of Decay of Mesotrons with Momentum *Phys. Rev.* 59 223
- [44] Bailey J et al. 1977 Measurements of relativistic time dilation for positive and negative muons in a circular orbit *Nature* **268** 301
- [45] Langevin P 1911 L'evolution de l'espace et du temps *Scientia* **10** 31 in rete qui
- [46] Mansouri R and Sexl R U 1977 A test theory of special relativity: I Simultaneity and clock synchronization *Gen. Rel. Grav.* **8** 497
- [47] Landau L D and Lifshitz E M 1975 *The Classical Theory of Fields* four revised edition (Butterworth Heinemann, Amsterdam)
- [48] Okun L B, Selivanov K G and Telegdi V L 2000 On the interpretation of the redshift in a static gravitational field *Am. J. Phys.* **68** 115 arxiv
- [49] Turneaure J P, Will C M, Farrell B F, Mattison E M and Vessot R F C 1983 Test of the principle of equivalence by a null gravitational red-shift experiment *Phys. Rev.* D 27 1705
- [50] Will 2006 C M The Confrontation between General Relativity and Experiment *Living Rev. Relativity* **9** 3
- [51] Faraday M 1849 1855 *Experimental Researches in Electricity* (R. and J. E. Taylor, London) in rete qui
- [52] Maxwell J C 1873 *A Treatise on Electricity and Magnetism* vol. II (Clarendon Press, Oxford)
- [53] Antoniazzi M e Giuliani G 1997 Campi, onde e particelle nei manuali di elettromagnetismo: un esempio di stratificazione concettuale e ontologica *G. Fis.* **38** 87 in rete qui
- [54] Whittaker E 1910 *A history of the theories of Aether and electricity* (Longmans Green & Co, London)
- [55] Buchwald J 1985 *From Maxwell to microphysics: aspects of electromagnetic theory in the last quarter of nineteenth century* (University of Chicago Press, Chicago)
- [56] Darrigol O 2003 *Electrodynamics from Ampère to Einstein* (Oxford, Oxford University Press)

- [57] Poynting J H 1884 On the transfer of energy in the electromagnetic field *Philosophical Transactions* **175** 343
- [58] Ferraris G 1894 Sulla trasmissione dell'energia elettrica in *Opere di Galileo Ferraris* vol. II (Hoepli, Milano, 1903) in rete qui
- [59] Goulielmakis E et al 2004 Direct Measurement of Light Waves Science 305 1267
- [60] Drude P 1900 Zur Elektronentheorie der Metalle Ann. Phys. 306 566
- [61] Roche J 1998 The present status of Maxwell's displacement current *Eur. J. Phys.* 19 155
- [62] Jackson J D 1999 Maxwell's displacement current revisited *Eur. J. Phys.*20 495 in rete anche qui
- [63] Wolsky A M 2015 On a charge conserving alternative to Maxwell's displacement current *Eur. J. Phys.* **36** 035019
- [64] Heaviside O 1893 *Electromagnetic Theory* vol. 1 ("The Electrician" Printing and Publishing Company, London)
- [65] Lorentz H 1916 The theory of electrons II ed (Teubner, Leipzig)
- [66] Giuliani G 1998 Fisica sperimentale, fisica matematica e fisica teorica: il caso di Galileo Ferraris *Physis* **35** 379 in rete qui
- [67] Faraday M 1855 Experimental Researches in Electricity III (London)
- [68] Faraday M 1855 Experimental Researches in Electricity I (London)
- [69] Williams L P 1965 Michael Faraday, (Chapman & Hall, London)
- [70] Giuliani G 2008 A general law for electromagnetic induction *EPL*81 60002 arxiv
- [71] Fleck L 1983 *Genesi e sviluppo di un fatto scientifico* (Il Mulino, Bologna)
- [72] Giuliani G 2000 On electromagnetic induction arxiv
- [73] Blondel A 1914 Sur l'énoncé le plus general des lois de l'induction Compt. Rend. Ac. Sc. 159 674

- [74] Giuliani G 2010 Vector potential, electromagnetic induction and 'physical meaning' *Eur. J. Phys.* **31** 871 arxiv
- [75] Hering C 1908 An imperferction in the usual statement of the fundamental law of electromagnetic induction *Trans. Am. IEE* **27** 1341
- [76] Rousseaux G, Kofman R and Minazzoli O 2008 The Maxwell Lodge effect: significance of electromagnetic potentials in the classical theory *Eur. Phys. J.* D **49** 249
- [77] Corbino O M 1911 Azioni elettromagnetiche dovute agli ioni dei metalli deviati dalla traiettoria normale per effetto di un campo *N. Cim.* **1** 397 in rete anche qui
- [78] von Klitzing K 1987 The ideal Corbino effect in: Commemorazione di Orso Mario Corbino a cura di Giua P E (Centro Stampa De Vittoria, Roma)
 43
- [79] Giuliani G 2008 L'induzione elettromagnetica: un percorso didattico G.*Fis.* 49 291 in rete anche qui
- [80] Giuliani G e Marazzini P 2012 Induzione elettromagnetica: un possibile percorso didattico *La fisica nella Scuola* XLV **2** 55
- [81] Young T 1807 *A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts* vol. I (Joseph Johnson, London)
- [82] Young T 1804 The Bakerian Lecture. Experiments and Calculations relative to physical Optics *Phil. Trans. Roy. Soc.* **91** 1
- [83] Grimaldi F M 1665 Physico Mathesis de Lumine, Coloribus et Iride (ex Typographia Haeredis Victorij Benatij, Bologna) in rete qui
- [84] Fresnel A 1866 1870 Ouvres Complètes a cura di De Senarmont H, Verdet E e Fresnel L (Imprimerie Impériale, Paris) tome I tome III tome III
- [85] Giacomarra C 2009 Luce e materia, onde e particelle: un possibile percorso didattico attraverso i fenomeni di interferenza I Parte *G. Fis.* **50** 67 in rete anche qui
- [86] Buonaura B and Giuliani G 2016 Wave and photon descriptions of light: historical highlights, epistemological aspects and teaching practices *Eur. J. Phys.* 37 055303

- [87] Giacomarra C 2009 Luce e materia, onde e particelle: un possibile percorso didattico attraverso i fenomeni di interferenza II Parte *G. Fis.* **50** 173 in rete anche qui
- [88] Planck M 1900 Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum Verh. Deutsch. Phys. Gesell. 2 237 trad. inglese in: Kangro H ed. 1972 Planck's Original Papers in Quantum Physics (Taylor & Francis, London)
- [89] Bose S 1924 Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese Zeits. Phys. 26 178 trad. it a cura di Antoci S
- [90] Mehra J and Rechenberg H 1982 *The Historical Development of Quantum Theory* (New York Heidelberg and Berlin, Springer Verlag)
- [91] Jammer M 1989 *The conceptual development of Quantum Mechanics* 2 ed. (Tomash, New York)
- [92] Kuhn Thomas 1978 *Black Body Theory and the Quantum Discontinuity 1894 - 1912* (Clarendon Press, Oxford)
- [93] Longair M 2013 *Quantum Concepts in Physics* (Cambridge University Press, Cambridge)
- [94] Strutt J W 1900 Remarks upon the law of complete radiation *Phil. Mag.* 49 539
- [95] Jeans J H 1905 On the partition of energy between matter and ether *Phil. Mag.* **10** 91
- [96] Strutt J W 1903 *Scientific Papers* vol. iv (Cambridge University Press, Cambridge)
- [97] Pokrowsi S 1929 Über einen möglichen Zusammenhang zwischen der Planckschen Konstante h und den ponderomotorischen Wirkungen zirkular polarisierter Strahlen Zeitschr. Phys. 57 278 trad it a cura di Antoci S
- [98] Beth R A 1936 Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light *Phys. Rev.* 50 115
- [99] Planck M 1899 Über irreversible Strahlungsvorgange 5 Mitteilung *Sitzungberichte der (Kgl.) Preussischen Akademie der Wissenschaften* 440

- [100] Robotti N and Badino M 2001 Max Planck and the 'Constants of Nature' Ann. Sc. 58 137
- [101] Born M 1962 Atomic Physics 7th ed (Blackie & Son Limited, London)
- [102] Einstein A 1906 Zur Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption Ann. Phys. 20 199 trad. ingl. in The collected papers of Albert Einstein vol 2 (Princeton, Princeton University Press) 192
- [103] Debye P 1910 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Theorie der Strahlung Ann. Phys. 33 1427
- [104] Einstein A 1917 Quantentheorie der Strahlung Phys. Zeit. 18 121 trad. ingl. in The collected papers of Albert Einstein vol 6 (Princeton, Princeton University Press) 220
- [105] Einstein A 1905 Über einen Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristichen Gesichtpunkt Ann. Phys. 17 132 trad. ingl. in The collected papers of Albert Einstein vol 2 (Princeton, Princeton University Press) 86
- [106] Wien W 1896 Über die Energievertheilung im Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers Ann. Phys. 294 662; Wien W 1897 On the division of energy in the emission spectrum of a black body Phil. Mag. 43 214
- [107] Wien W 1894 Temperatur und entropie der strahlung Ann. Phys. 288 132
- [108] Pauli W 1940 The Connection Between Spin and Statistics *Phys. Rev.* 58 716
- [109] Pais A 1979 Einstein and the quantum theory Rev. Mod. Phys. 51 863
- [110] Blanpied W A Satyendranath Bose: Co Founder of Quantum Statistics *Am. J. Phys.* **40** 1212
- [111] Kittel C 1969 Thermal Physics (John Wiley & Sons, New York)
- [112] Rigamonti A and Carretta P 2009 *Structure of Matter* 2nd ed (Springer, Milano)
- [113] Penzias A A and Wilson R W 1965 A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s *Astr. Jour.* **142** 419

- [114] Ketterle W 2001 When Atoms Behave as Waves: Bose Einstein Condensation and the Atom Laser *Nobel Lecture*
- [115] Cornell E A and Wieman C E 2001 Bose Einstein Condensation in a Dilute Gas: the First 70 Years and Some Recent Experiments *Nobel lecture*
- [116] Fermi E 1926 Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico *Rend. Acc. Lincei* 3 145
- [117] Dirac P A M 1926 On the Theory of Quantum Mechanics *Proc. R. Soc.* A **112** 661
- [118] Lewis G N 1926 The Conservation of Photons Nature 118 874
- [119] Einstein A 1909 Über die Entwickelung unserer Anschauugen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung *Phys. Zeits.* **10** 817 trad. ingl. in *The collected papers of Albert Einstein* vol 2 (Princeton, Princeton University Press) 379
- [120] Stark J 1909 Zur experimentellen Entscheidung zwischen Ätherwellen
 und Lichtquantenhypothese I. Röntgenstrahlung *Phys. Zeits.* 10 902
- [121] Sommerfeld A 1909 Über die Verteilung der Intensität bei der Emission von Röntgenstrahlen *Phys. Z.* **10** 969
- [122] Eckert M 2015 From X rays to the *h*-hypothesis: Sommerfeld and the early quantum theory 1909 1913 *Eur. Phys. J. Special Topics* **224** 2057
- [123] Millikan R 1916 A direct photoelectric determination of Planck's "h" Phys. Rev. 7 355
- [124] McCormmach R J 1967 J. J. Thomson and the structure of light *Br. J. His. Sc.* **3** 362
- [125] Taylor G I 1909 Interference fringes with feeble light *Proc. Camb. Phil.* Soc. 15 114
- [126] Einstein A 1909 Zum gegenwärtigen stand des strahlungproblems *Phys. Zeits.* 10 185 trad. ingl. in *The Collected Papers of Albert Einstein* vol 2 (Princeton, Princeton University Press) 255
- [127] Lorentz H A 1916 *Les Theories Statistiques en Thermodynamique* (Leipzig: Teubner)
- [128] Einstein A 1921 Über ein den Elementarprozeß der Lichtemission betreffendes Experiment Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 882 trad. it. a cura di Antoci S
- [129] Klein M 1970 The First Phase of the Bohr Einstein Dialogue *His. Stud. Phys. Sc.* **2** 1
- [130] Stark J 1907 On the Radiation of Canal Rays in Hydrogen ApJ 23 23
- [131] Emden R 1921 Über lichtquanten Phys. Zeits. 22 513
- [132] Redžić D V 1990 The Doppler effect and conservation laws revisited Am. J. Phys. 58 1205
- [133] Schröder S et al 1990 First laser cooling of relativistic ions in a storage ring *Phys. Rev. Lett.* **64** 2901
- [134] Ives H E and Stilwell G R 1938 An experimental study of the rate of a moving atomic clock J. Opt. Soc. Am. 28 215
- [135] Hänsch T W and Schawlow A L 1975 Cooling of Gases by Laser Radiation *Opt. Comm* **13** 68
- [136] Stenholm S 1986 The semiclassical theory of laser cooling *Rev. Mod. Phys.* 58 699
- [137] Wineland D J and Itano W M 1979 Laser cooling of atoms *Phys. Rev.* A 20 1521
- [138] Castin Y, Wallis H and Dalibard J 1989 Limit of Doppler cooling J. Opt. Soc. Am. B 6 2046
- [139] Bartlett A A 1964 Compton Effect: Historical Background Am. J. Phys. 32 120
- [140] Compton A H 1923 A quantum theory of the scattering of X rays by light elements *Phys. Rev.* 21 484
- [141] Debye P 1923 Zerstreung von Röntgenstahlen und Quantentheorie Phys. Zeits. 24 161
- [142] Compton A H 1923 The spectrum of scattered X rays *Phys. Rev.* 22 409

- [143] Compton A H 1924 A general quantum theory of the wavelength of scattered X - rays *Phys. Rev.* 24 168
- [144] Rybicki G B and Lightman A P 1979 *Radiative Processes in Astrophysics* (John Wiley & Sons Inc, Hoboken NJ)
- [145] Bohr N, Kramers H A and Slater J C 1924 The quantum theory of radiation *Phil. Mag.* **47** 785 trad. it. a cura di Antoci S
- [146] Bothe W and Geiger H 1925 Über das Wesen des Comptoneffektes; ein experimenteller Beitrag zur Theorie der Strahlung Z. Phys. 32 639
- [147] Bay Z, Henri V P and McLernon F 1955 Simultaneity in the Compton Effect *Phys. Rev.* 97 1710
- [148] Compton H and Simon A 1925 Directed quanta of scattered X Rays Phys. Rev. 26 289
- [149] Schrödinger E 1927 Über den Comptoneffekt *Ann. Phys.* **82** 257 trad. it. a cura di Antoci S
- [150] Brown L 2002 The Compton effect as one path to QED Stud. Hist. Phil. Mod. Phys. 33 211
- [151] Norton J D 2013 Chasing the Light Einstein's Most Famous Thought Experiment in: Brown J R, Frappier M and Meynell L eds. *Thought Experiments in Science, Philosophy, and the Arts* (Routledge, London) in rete qui
- [152] de Broglie L 1922 Sur les interférences et la théorie des quanta de lumière Comptes Rendus 175 811
- [153] Feynman R, Leighton R and Sands M 1963 The Feynman lectures on Physics vol. I (Addison - Wesley, Reading)
- [154] Feynman R, Leighton R and Sands M 1963 The Feynman lectures on Physics vol. II (Addison - Wesley, Reading)
- [155] Jacques V, Wu E, Toury T, Treussart F, Aspect A, Grangier P and Roch J F 2005 Single - photon wavefront-splitting interference *Eur. Phys. J.* D 35 561
- [156] Video dell'esperimento di interferenza a fotone singolo qui

- [157] Rose A 1953 Quantum and Noise Limitations of the Visual Process Josa 43 715
- [158] Compton A H 1929 The corpuscular properties of light *Rev. Mod. Phys.* 1 74
- [159] de Broglie L 1922 Rayonnement noir et quanta de lumière J. Phys. Radium 3 422
- [160] de Broglie L 1923 Ondes et quanta Compt. Rend. 177 507
- [161] Poynting J H 1909 The Wave Motion of a Revolving Shaft, and a Suggestion as to the Angular Momentum in a Beam of Circularly Polarised Light *Proc. R. Soc.* A 82 560
- [162] de Broglie L 1923 Quanta de lumière, diffraction et interférence Compt. Rend. 177 548
- [163] de Broglie L 1925 Recherches sur la théorie des quanta Ann. Phys. 3 22
- [164] Brown H R and de Martins R A 1984 De Broglie's relativistic phase waves and wave groups Am. J. Phys. 52 1130
- [165] Davison C and Germer L H 1927 Diffraction of electrons by a crystal of Nickel *Phys. Rev.* **30** 705
- [166] Thomson G P 1928 Experiments on the Diffraction of Cathode Rays Proc. R. Soc. London A 117 600
- [167] Hughes J V 1935 The diffraction of β -rays. A verification of de Broglie's law for very high velocity electrons *Phil. Mag.* **19** 129
- [168] Jönsson C 1961 Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten Z. Phys. 161 454; 1974 Electron Diffraction at Multiple Slits Am. J. Phys. 42 4
- [169] French A and Taylor E 1974 The Pedagogically Clean, Fundamental Experiment *Am. J. Phys.* **42** 3
- [170] Donati O, Missiroli G F and Pozzi G 1973 An Experiment on Electron Interference *Am. J. Phys.* **41** 639
- [171] Merli P G, Missiroli G F and Pozzi G 1976 On the statistical aspect of electron interference phenomena *Am. J. Phys.* **44** 306

- [172] Merli P G, Missiroli G F and Pozzi G Interferenza di elettroni
- [173] Tonomura A, Endo J, Matsuda T, Kawasaki T and Ezawa H 1989 Demonstration of single - electron buildup of an interference pattern *Am. J. Phys.* 57 117
- [174] Hitachi's Double slit experiment
- [175] Giuliani G 2007 Interferenza G. Fis. 48 59 in rete anche qui
- [176] Estermann I and Stern O 1930 Beugung Von Molekularstrahlen Z. Phys. 61 95
- [177] von Laue M 1912 Eine quantitative pr
 üfung der theorie f
 ür die interferenz-erscheinungen bei R
 öntgenstrahlen Sitzungsberichte der Kgl. Bayer. Akad. Der Wiss. 363
- [178] Shull C G 1994 Nobel Lecture
- [179] Brockhouse B N 1994 Nobel Lecture
- [180] Carnal O and Mlynek J 1991 Young's Double Slit Experiment with Atoms: A Simple Atom Interferometer *Phys. Rev. Lett.* **66** 2689
- [181] Cronin A D, Schmiedmayer J and Pritchard D E 2009 Optics and interferometry with atoms and molecules *Rev. Mod. Phys.* **81** 1051
- [182] Barnett S M, Babiker M and Padgett M J 2017 Optical orbital angular momentum *Phil. Trans. R. Soc. A* **375** 20150444
- [183] Einstein A 1919 What is the theory of relativity scritto per *The Times* in rete qui
- [184] Fermi E 1923 Le masse nella teoria della relatività in: Kopff A *I fondamenti della relatività einsteniana* (Hoepli, Milano) in rete qui
- [185] Passatore G 2010 La massa relativistica: una discussione che oggi si ripropone *G. Fis.* **51** 255
- [186] Richtmyer F K, Kennard E H and Lauritsen T 1955 Introduction to Modern Physics (McGraw - Hill, New York)
- [187] Einstein A 1905 Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? Ann. Phys. 18 639 trad. ingl. in The Collected Papers of Albert Einstein vol 2 (Princeton, NJ: Princeton University Press) 172

- [188] *The Collected Papers of Albert Einstein* vol 5 (Princeton, NJ, Princeton University Press) trad. ingl. 20
- [189] Hecht E 2016 Relativity, potential energy, and mass *Eur. J. Phys.* **37** 065804
- [190] Landau L D and Lifshitz E M 1976 *Mechanics* third ed. (Butterwoth Heinemann, Oxford)
- [191] Noether E 1918 Invariante variationsprobleme *Göttinger Nachrichten* 235; trad. ingl. qui
- [192] Kosmann Schwarzbach Y 2010 *The Noether Theorems Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century* (Springer, New York) in rete qui
- [193] Lange M 2007 Laws and meta laws of nature: Conservation laws and symmetries *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **38** 457
- [194] Romero Maltrana D 2015 Symmetries as by products of conserved quantities *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **52** 358
- [195] Fuchs CA and Peres A 2000 Phys. Today 53 70 in rete anche qui
- [196] Bell J 1964 On the Einstein Podolsky Rosen paradox Phys. 1 195
- [197] Einstein A, Podolsky B and Rosen N 1935 Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.* 47 777
- [198] Schrödinger E 1935 Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik *Naturwissenschaften* **23** 807 trad. ingl. qui
- [199] Hilgevoord J and Uffink J 2016 The Uncertainty Principle *Stanford Encyclopedia of Phylosophy* in rete qui
- [200] Heisenberg W 1927 Ueber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik and Mechanik Zeits. Phys. 43 172 trad. it. in: Boffi S 1990 Il principio di indeterminazione in rete qui
- [201] Kennard E H 1927 Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen *Z. Phys.* **44** 326
- [202] Robertson H P 1929 The Uncertainty Principle Phys. Rev. 34 163

- [203] Griffiths D J 1995 *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, New York) in rete qui
- [204] Mandelstam L and Tamm I G 1945 The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics J. Phys. (USSR) 9 249
- [205] Vaidman L 1992 Minimum time for the evolution to an orthogonal quantum state *Am. J. Phys.* **60** 182
- [206] Aharonov Y and Vaidman L 1990 Properties of a quantum system during the time interval between two measurements *Phys. Rev.* A **41** 11
- [207] Fine A 1996 *The Shaky Game: Einstein, Realism and the Quantum Theory* 2nd ed (University of Chicago Press, Chicago)
- [208] Jammer M 1974 The Philosophy of Quantum Mechanics: The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective (John Wiley & Sons, Inc.)
- [209] Fine A 2016 The Einstein-Podolsky-Rosen Argument in Quantum Theory *Stanford Encyclopedia of Philosophy* in rete qui
- [210] Genovese M 2005 Research on hidden variable theories: A review of recent progresses *Phys. Rep.* **413** 319
- [211] Bohm D 1952 A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" variables I *Phys. Rev* 85 166
- [212] Holland P 1995 *The quantum theory of motion. An Account of the de Broglie - Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge)
- [213] Giuliani G 2007 On realism and quantum mechanics *N. Cim.* B **122** 267 in rete anche qui
- [214] Brunner N, Cavalcanti D, Pironio S, Scarani V and Wehner S 2014 Bell nonlocality *Rev. Mod. Phys.* 86 419 arxiv
- [215] von Neumann J 1932 Mathematishe Grundlagen der Quanten mechanik (Verlag Julius - Springer, Berlin); trad. inglese (Princeton University Press)

- [216] Jauch J M and Piron C 1963 Can hidden variables be excluded in quantum mechanics? *Helv. Phys. Acta* **36** 827
- [217] Bell J 1966 On the Problem of Hidden variables in Quantum Mechanics *Rev. Mod. Phys.* **38** 447
- [218] Bohm D 1952 A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" variables II Phys. Rev 85 180
- [219] Legget A J 2003 Nonlocal Hidden variable Theories and Quantum Mechanics: An Incompatibility Theorem *Found. Phys.* 33 1469
- [220] Clauser J, Horne M, Shimony A and Holt R 1969 Proposed experiment to test local hidden variables theories *Phys. Rev. Lett.* **23** 880
- [221] Gröblacher S, Paterek T, Kaltenbaek R, Brukner Č, Zÿukowski M, Aspelmeyer M and Zeilinger A 2007 An experimental test of non - local realism *Nature* **446** 871 arxiv
- [222] Kocher C and Commins E 1967 Polarization correlations of photons emitted in an atomic cascade *Phys. Rev. Lett.* **18** 575
- [223] Aspect A, Grangier P and Roger G 1982 Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A New Violation of Bell's Inequalities *Phys. Rev. Lett.* **49** 91
- [224] Weihs, G et al. 1988 Violation of Bell's Inequality under Strict Einstein Locality Conditions *Phys. Rev. Lett.* 81 5039
- [225] Aspect A 2002 Bell's theorem: the naive view of an experimentalist in: Bertlmann R and Zeilinger A (eds.) *Quantum (Un)speakables* (Springer, Berlin) arxiv
- [226] Born M 1971 *The Born Einstein Letters* (Macmillan, London) in rete qui
- [227] Giustina M et al. 2013 Bell violation using entangled photons without the fair sampling assumption *Nature* **497** 227 arxiv
- [228] Shalm L K et al. 2015 Strong Loophole Free Test of Local Realism *Phys.Rev. Lett.* **115** 250402 arxiv
- [229] Pound R V an Rebka jr G A 1960 Apparent weight of photons *Phys. Rev. Lett.* **4** 337

[230] Pascal B 1962 Pensieri (Einaudi, Torino)

Indice analitico

accelerazione, 36-38, 49, 72, 73, 198, 203, 265 di gravità, 276, 277 quadrivettore, 267 accelerometro, 98, 199 Allev esperimento di, 46, 47 Alley, Carrol, 41, 46, 47, 54 Arago, Dominique Francois, 103 Aspect, Alain, 241, 242, 246 asse ottico, 291, 292 principale, 289 azione a distanza, 59, 60, 64, 247, 253 Beck, Guido, 161 Bell teorema di, 234, 235, 237, 240, 249, 250 Bell, John, 209, 234 Beth, Richard, 109 Biot e Savart legge di, 71 Biot, Jean - Baptiste, 71 biprisma di Fresnel, 104, 172 elettronico, 181, 183 birifrangenza, 294 Blondel, André, 90 Bohm teoria a variabili nascoste di, 231, 232 Bohm, David, 230, 231 Bohr

modello di, 19, 127, 194 Bohr, Niels, 20, 112, 127, 160, 249 Boltzmann costante di, 105, 124 statistica di, 113, 122, 132, 177 Bondi, Hermann, 35 Born interpretazione di, 17 Born, Max, 17, 249 Boscovich, Ruggero Giuseppe, 102 Bose statistica di. 132 Bose, Satyendra Nath, 104, 108, 110, 112, 115, 116, 120, 121 bosone, 120, 185 Bothe, Walther, 160 Bridgman, Percy Williams, 3 buca (hole), 10, 20, 21 Buchwald, Jed, 62, 76

caduta libera, 42, 52, 198 calcite, 103, 291, 293 calorico, 9 campo conservativo, 187, 281, 282 di radiazione, 72 elettrico, 60–62, 65, 70, 74, 86, 92, 125, 166, 170, 210–212, 214, 258, 281, 283, 289, 292–294 di Hall, 283 effettivo, 281 indotto, 84, 88, 279–282

magnetico, 60, 61, 65, 70, 74, 84, 86-92, 96, 97, 210, 251, 280, 282-284, 287, 290 caos deterministico, 24 carica conservazione della, 62, 77 Cattaneo, Carlo, 32, 68 causalità, 21, 22, 74, 112, 171, 235 principio di, xiv, 2, 34, 35, 68 simultanea, 15 temporalmente ordinata, 15 Christiansen, Christian, 106 cinematica relativistica, 265-267 COBE, 119 completezza della meccanica quantica, 209, 215, 226,230 di una teoria, 229 Compton effetto, 155-161, 174 inverso, 158 lunghezza d'onda di, 157 condensato di Bose - Einstein, 121, 183 condensatore, 63, 64, 74-76 conduttore ohmico, 282 connessione causale, 12-14, 17, 18, 20, 21, 59, 63, 89, 90 deterministica, 14, 25 empirica, 14, 25 in dispositivi quantici, 20 connessione deterministica, 17, 18 continuità, equazione di, 62 Corbino disco di, 98, 284-287 Corbino, Orso Mario, 6 corpo nero 130-132, 177, 183 fluttuazioni della, 130, 131 corrente elettrica, 20, 21, 27, 29, 71, 78 continua, 64, 71 densità di, 61, 75

di conduzione, 65, 75 di spostamento, 75 indotta, 81, 83 lentamente variabile, 71 correnti di Ampère, 95 costante dielettrica, 61 relativa, 289, 290 Coulomb, Charles Augustin, 59, 60 cristallo birifrangente, 241 uniassico, 291, 292 d'Alembert equazione delle onde di, 67, 69 operatore di. 67 Darrigol, Olivier, 62, 76 Davisson, Clinton Joseph, 180 de Broglie lunghezza d'onda di, 8, 169, 170, 177 de Broglie, Louis, 3, 168, 170, 177-181, 183 Debye, Peter, 110, 112, 115, 118, 155 descrizione causale, 24, 170, 171 deterministica, 22, 24, 171, 232, 234 determinismo, 21, 35, 171 diffrazione della luce, 103, 123, 129, 130 di atomi, 182 di elettroni, 8, 170, 180, 181 di neutroni, 182 reticolo di, 182, 183 diffusione coefficiente di, 20 lunghezza di, 20 dinamica relativistica, 268-272 legge fondamentale della, 268 radiazione di, 104-106, 108, 123, 124, Dirac, Paul Adrien Maurice, 7, 120, 194 disco di Corbino, 98, 284-287 di Faraday, 82, 83, 96, 287 dispositivo quantico, 20 distribuzione di Maxwell - Boltzmann, 114 disuguaglianza

CHSH, 238, 240, 241, 244, 246 di Bell, 238–241, 249 di Kennard, 220-222 di Robertson, 220, 221, 224, 225 energia - tempo, 224, 225 disuguaglianze di Heisenberg, 224 HKR, 218, 224 Donati, Oriano, 181 Doppler effetto, 47, 125, 134, 137, 144, 145, 179.258 Drude, Paul, 66 dualità onda - corpuscolo, 131 due corpi problema dei, 22 durata definizione, 28 propria, 36, 39, 42, 44, 257 Easterman, Immanuel, 182 effetto Brioullin, 161 Compton, 155-161, 174 inverso, 158 Doppler, 47, 125, 134, 137, 144, 179, 258 fotoelettrico, 8, 128, 174, 251 Hall, 280, 285 Joule, 283 Mössbauer, 47, 144, 278 Maxwell - Lodge, 91 viaggio, 37, 39-41, 46, 97 Ehrenfest, Paul, 133 Einstein, Albert, 3, 31, 34, 35, 40, 60, 76, 92, 108, 110–112, 116, 117, 120, 123-126, 128-133, 137, 162, 165, 177, 183, 184, 191, 201, 209, 226, 234, 249, 255 elettrodinamica di Maxwell, 92, 117, 201 quantica, xii, 60, 161 elettrone, 8, 10, 193 esistenza, 8

mobilità, 286 ellissoide degli indici, 291 Emden, Robert, 134 energia a riposo, 192, 270 cinetica, 187-188 del campo elettromagnetico, 189-191 densità di, 189 di legame, 197 di rinculo, 139-155 e relatività speciale, 191-204 potenziale, 187-188 e relatività generale, 188 e relatività speciale, 193 entità teorica, 6, 7, 9, 27 EPR argomento di, 213, 230, 239 esperimenti, 213 esperimento mentale, 165, 215, 216, 218, 230 etere, 7, 9–11, 59, 63, 80, 103, 162 Eulero, 62 Faraday disco di, 82, 96, 287 Faraday, Michael, 57, 58, 78, 81, 83, 84, 98 fenomeno riproducibilità di un, xiv, 2 Fermi, Enrico, 120, 192 fermione, 120, 185 Ferraris, Galileo, 63 Feynman, Richard, 69, 91, 168 fissione nucleare, 195, 197 Fleck, Ludwik, 87 flusso legge del, 89, 91 regola del, 89-92, 98, 279 forza di Lorentz, 60, 88, 282-284 elettromotrice, 78, 85-94, 96, 97, 279,

280, 283, 284, 286, 287 Fraunhofer, configurazione di, 166 Fraunhofer, Joseph, 105, 166 French, Anthony, 181 Fresnel, Augustin, 103 funzione d'onda, 16 funzione di stato, 16, 24, 217, 220, 253 fusione nucleare, 196, 197 Galilei, Galileo, 5, 57 Galileo trasformazioni di, 31, 32, 34 gatto di Schrödinger, 213, 215, 216 Gaulard, Lucien, 81 Geiger, Hans, 160 Germer, Lester, 180 Gibbs, Dixon, 81 giunzione p - n, 20 giustificazione contesto della, 2-4 grandezza fisica, 6, 7 significato fisico, 10, 11, 204 gravitazione, 21-23, 29, 42, 45, 52 costante di, 276 Grimaldi, Francesco Maria, 103 Hänsch, Theodor Wolfgang, 146 Habicht, Conrad, 201 Hafele e Keating esperimento di, 41, 47 Hafele, Joseph Carl, 39, 47, 54 Hall campo elettrico di, 283 effetto, 280, 285 Hall, David, 49 Hamilton - Jacobi equazione di, 232 Heaviside, Oliver, 62, 78, 91 Hecht, Eugene, 204, 205 Heisenberg, Werner Karl, 218 Helmoltz, Hermann, 61 Helmoltz, teorema di, 61 Henry, Joseph, 80 Hering, Carl, 91 Hermann, Jacob, 62

Hertz, Heinrich Rudolf, 9, 16, 28, 57, 59, 60, 63, 78, 79, 91 Hilbert, David, 207 Hilgevoord, Jan, 217 Hughes, J V, 181 idrogeno atomo di, 7, 17-20, 193, 194, 221, 223.251 immagine del Mondo, 7, 59, 65, 162, 170, 213 indeterminazione principio di, 217, 224 relazione di, 232 induzione elettromagnetica, 80 legge generale, 88, 92, 98 inerzia, 191, 198, 199, 201-203 interazione coulombiana, 19, 20, 193, 194 spin - orbita, 19, 194 interferenza a fotone singolo, 104, 172, 173 della luce, 102-104, 162, 164-173 di atomi, 182 di elettroni, 104, 170 invarianza locale di posizione, 54 principio di, 31, 34 temporale, 22 Jönsson, Claus, 181 Jackson, John David, 62 Jammer, Max, 105, 230

Jammer, Max, 105, 230 Jeans, James, 107 Joule effetto, 283

Keating, Richard, 39, 47, 54 Kennard, Earle Hesse, 220 Kirchhoff, Gustav Robert, 105 Klein, Felix, 133, 160, 207 Kosmann - Schwarzbach, Yvette, 207 Kramers, Hendrik Anton, 160 Kuhn, Thomas, 105

Lagrange

funzione di. 207 lamina a mezz'onda, 293 a quarto d'onda, 248, 293-295 Langevin, Paul, 49 Laplace, Pierre Simon, 21 larghezza naturale di una, 139 larghezza naturale di una riga, 147, 151, 153, 154, 201, 225 laser, xv, 46, 72, 73, 103, 114, 139, 142, 143, 146, 148, 151, 153, 154, 183, 191, 241, 242 lastra fotografica, 129, 130 LED, Light Emitting Diode, 20 legge fisica significato, 25 Lewis, Gilbert Newton, 124 Liénard e Wiechert, potenziali di, 69 Liénard, Alfred - Marie, 69, 80 località condizione di, xiv, 25, 59, 68, 230, 234 - 249Lorentz forza di, 62, 88 trasformazioni di, 30-32, 35, 66-68, 76, 77, 94, 179, 262, 264, 265 Lorentz, Hendrik, 80 Lorenz condizione di, 66, 77 Lorenz, Ludvig Valentin, 66 luce aberrazione della, 145 diffrazione della, 103, 123, 129, 130 interferenza della, 102-104, 162, 164-173 polarizzata, 210 circolarmente, 210 linearmente, 210 polarizzazione della, 103 misura, 293, 295 velocità della invariante, 34 velocità limite, 59

Lucrezio, 27, 96 Lummer, Otto, 106 lunghezza contrazione della, 35, 50 di diffusione, 20 Mössbauer effetto, 47, 144, 278 magnete, 82-84, 92-95 magnetoresistenza, 286 Malus legge di, 212 Malus, Étienne - Louis, 103, 212 Mansouri, Reza, 50 maser, 52-54, 114 massa difetto di, 195, 196, 201, 202, 205 effettiva, 10 gravitazionale, 198 inerziale, 198 relativistica, 199 massa - energia, tabella, 195 materiali otticamente anisotropi, 289 Maxwell equazioni di, 61 teoria di, 3, 57-72, 128 termine di, 75 Maxwell - Lodge effetto, 91 Maxwell, James Clerk, 3, 7, 10, 11, 31, 58, 68, 76, 78, 85-87, 91, 101, 112, 162, 189, 205 Mehra, Jagdish, 105 Mercurio precessione del perielio, 23 microscopio elettronico, 8, 182 Millikan, Robert, 127 Minkowski, Hermann, 10 Missiroli Gian Franco, 181 mobilità elettrica, 10 momento angolare densità di di un'onda elettromagnetica, 191 muone, 49

Nernst, Whalter, 127 neutrone, 197 Newton, Isaac, 22, 62, 102 Nicol prisma di, 294 Noether primo teorema di, 207 secondo teorema di, 207 Noether, Emmy, 207 non - località, xiv, 247, 248, 253 Norton, John, 165

Ohm

legge di, 28, 282 onda elettromagnetica, 10, 11, 59, 104, 124, 125, 128, 136, 161, 165, 170, 186, 190, 191, 210, 258 polarizzata circolarmente, 293 ellitticamente, 293 linearmente, 210 orologi paradosso degli, 37 sincronizzazione, 36 orologio a molla, 52 a pendolo, 29, 52 al cesio, 30, 41 al quarzo, 52 al rubidio, 41 atomico, 277 e gravità, 277 ideale, 29, 51 ottico, 52 Orsay, esperimento di, 242-251 Pais, Abraham, 116, 125, 161 Passatore, Giulio, 199 Pegna, Guido, 83

Penzias, Arno, 119 permeabilità magnetica, 61 relativa, 289 Planck costante di, 48, 105, 123, 178, 220 Planck, Max, 1, 105, 108, 110, 112, 115, 127, 177, 184 Podolsky, Boris, 209, 226 Poincaré, Henry, 23 Pokrowski, S, 109 polarizzatore lineare, 211, 212, 214, 248, 294.295 polarizzazione della luce misura della, 294 positrone, 193 potenziale gravitazionale, 42, 45, 53, 276 guantico, 232-234 scalare, 17, 79 vettore, 17, 78, 79, 85, 88, 90-93, 96, 97,280 potenziali avanzati. 68 ritardati, 68 Poynting teorema di, 65, 189 vettore di, 64, 124, 189, 190, 290 Povnting, John Henry, 64, 178 Pozzi, Giulio, 181 predicibilità, 21, 22, 24, 171 proto - teoria, 16, 17, 19, 252 protone, 19, 20, 195, 197

quadriaccelerazione, 267 quadricorrente, 67 quadriforza, 268 quadrimpulso, 268, 270, 271 quadripotenziale, 66 quadrivelocità, 266 quadrivettore, 265 d'onda, 176 energia - impulso, 271 quanti di luce, 3, 104, 115, 123–125, 131, 135, 172, 177, 178

radiazione campo di, 72 cosmica di fondo, 51, 106 pressione della, 191 raggi cosmici, 49 raggio ordinario, 293 straordinario, 293 Rayleigh - Jeans legge di, 106, 107, 131 realismo, 249-253 delle teorie, 210, 216, 253 temperato, 2, 250 Rechenberg, Helmut, 105 red shift gravitazionale, 47, 54, 276, 278 Reichenbach, Hans, 2 relatività generale, xii, xiii, 23, 29, 42, 51 principio di, 31, 36, 76 speciale, xi-xiv, 3, 10, 28, 30, 31, 34, 42, 45, 47, 50, 53, 54, 59, 70, 76, 92, 95, 125, 177, 178, 191-193, 198, 199, 206, 234, 255, 271, 276 postulati, 31 Robertson, Howard Percy, 220 Rose, Albert, 174 Rosen, Nathan, 209, 226 Rossi, Bruno, 49 Rubens, Heinrich, 127 Savart, Félix, 71 Schawlow, Arthur, 146 Schrödinger equazione di dipendente dal tempo, 17 indipendente dal tempo, 19, 193 gatto di, 213, 215, 216 Schrödinger, Erwin, 17, 19, 47, 133, 134, 137, 142, 156, 218, 274 scoperta contesto della, 2-4 senso comune, 4, 9 razionalmente orientato, xiv, 2, 4 Sexl, Roman Ulrich, 50 significato fisico, 9-11, 78, 79, 94, 111, 179, 183, 190, 200, 204, 216, 222,

224, 279

simmetrie e leggi di conservazione, 206-208 Simon, Alfred, 160 simultaneità locale, 28 sistema fisico caotico, 24 causale, 25 deterministico, 24 Slater, John Clarke, 160 Sommerfeld, Arnold, 7, 127, 160 spato d'Islanda, 291 spazio omogeneità e isotropia, 31 spazio - tempo, 10, 23, 40-42, 45, 51, 54, 55, 67, 76, 176, 265 spettrometro di Bragg, 155, 159 di massa, 193 Stark, Johannes, 126, 133, 135, 156, 200 statistica di Boltzmann, 113, 122, 132, 177 di Bose, 132 di Bose - Einstein, 120 di Fermi - Dirac, 120, 123 statistiche quantiche, 120 Stern e Gerlach apparato di, 241 Stern, Otto, 182 Stirling approssimazione di, 110 Strutt, John William (baron Rayleigh), 107 struttura fine costante di, 194 superconduttore, 8 Suppe, Frederik, 11 suscettività elettrica, 289 Taylor, Edwin, 181

Taylor, Geoffrey Ingram, 129 tempo che cosa è, 27 dilatazione del, 35, 36, 39, 41, 42, 50, 144, 255

```
verifica sperimentale, 47, 50
    intervallo di
       proprio, 41, 51, 266
    omogeneità del, 31
    proprio, 198
teoria
    a variabili nascoste
       alla Bell, 236, 237, 240, 241, 245,
         246, 249, 252
       di Bohm, 231, 232
       non locali, 241
     cinematica di prova di Mansouri e
         Sexl, 50
    cinetica dei gas, 13
     interpretazione di una, 6, 7, 11, 15-
          17, 63, 98, 209, 210, 215, 218,
         252
    locale, 59
termodinamica
    seconda legge della, 22
terzetto
    paradosso del, 38
       asimmetrico, 45
Thomson, George Paget, 180
Thomson, Joseph John, 128
transistor, 8
trasformazioni
    di Galileo, 31, 32, 34
    di Lorentz, 30-32, 35, 66-68, 76, 77,
         94, 179, 262, 264
Uffink, Jos, 217
Vaidman, Lev, 225
Van Vleck, John Hasbrouck, 160
velocità
     composizione delle, 33, 34
       galileiana, 43, 88, 270, 280
       relativistica, 33, 266
    di deriva, 280
    limite, 31, 33, 34, 36, 59, 178, 192,
          199
    quadrivettore, 199, 266
Warburg, Emil Gabriel, 127
```

```
Whittaker, Edmund, 62, 76
Wiechert, Emil, 69, 80
Wien
legge di, 106, 124, 131, 177
Wien, Wilhelm, 106
Wilson, Robert, 119
```

Young, Thomas, 101-103, 162, 165, 181

Electromagnetism Relativity Quanta - Physics History Epistemology

Giuseppe Giuliani

Some physical topics are revisited in the light of a unitary epistemological view of classical and quantum physics. The epistemological view, presented in the first part of the book, is applied to topics like time, electromagnetism, light, energy and quantum mechanics. The treatment of each topic is grounded on crucial turning points in the history of physics. Four appendices deal with some calculations omitted in the text.

Alumnus of the Collegio Ghislieri, Giuseppe Giuliani (1938) graduated in Physics in 1960. He worked in the field of experimental solid state physics. Afterwards, he switched to History, Philosophy and Foundations of Physics. At the University of Pavia, he has taught courses in semiconductor physics, electromagnetism, history and foundations of physics. He has organized national and international meetings and has edited the publication of their proceedings. From 2005 to 2011 he has been vice director of the Giornale di fisica and of the Quaderni di storia della fisica. He has been the editor of the series Percorsi della Fisica. His scientific activity is documented on the site: http://fisica.unipv.it/percorsi

E-mail: giuseppe.giuliani@unipv.it

Alunno del Collegio Ghislieri, Giuseppe Giuliani (1938) si è laureato in fisica nel 1960 a Pavia. Ha lavorato nel campo della fisica sperimentale dello stato solido. Successivamente, i suoi interessi scientifici sono stati rivolti alla storia, alla filosofia e ai fondamenti della fisica.

All'Università di Pavia, ha svolto, tra l'altro, corsi di fisica dei semiconduttori, di elettromagnetismo, di storia e di fondamenti della fisica.

Ha organizzato convegni nazionali e internazionali e ne ha curato la pubblicazione degli atti. Dal 2005 al 2011 è stato vice direttore del Giornale di fisica e dei Quaderni di storia della fisica. È stato il curatore della collana *Percorsi della fisica*. La sua attività scientifica è documentata nel sito: http://fisica.unipv.it/percorsi

Il volume propone una rivisitazione critica di alcuni argomenti di fisica alla luce di una visione epistemologica unitaria della fisica classica e quantica. La posizione epistemologica, illustrata nella prima parte del volume, è successivamente applicata ad argomenti quali il tempo, l'elettromagnetismo, la luce, l'energia e la meccanica quantica. La trattazione dei vari argomenti è ancorata a punti di svolta cruciali nella storia della fisica. Nel testo sono delineati solo i calcoli essenziali. Derivazioni più complete sono collocate in quattro appendici.

Nella sezione *Scientifica* Pavia University Press pubblica esclusivamente testi scientifici valutati e approvati dal Comitato scientifico-editoriale. www.paviauniversitypress.it/scientifica





Edizioni dell'Università degli Studi di Pavia